פתרון תרגיל 2

22 באוגוסט 2017

1. תהיינה $A_1, A_2, ..., A_n$ קבוצות.
הוכיחו: $A_1 \triangle A_2 \triangle ... \triangle A_n = \{x | x \text{ in odd number of sets } A_i\}$. כלומר, קבוצת כל האיברים שנמצאים במס' אי־זוגי של קבוצות מתוך $A_1, A_2, ..., A_n$.
<u>פתרון:</u>

בסיס האינדוקציה: עבור $n = 2$ ברור כי מתקיים התנאי.

נניח שהתנאי מתקיים עבור n אזי:

$$\begin{aligned}
A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n \triangle A_{n+1} = (A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n) \triangle A_{n+1} = \\
\{x \mid (x \in (A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n) \wedge x \notin A_{n+1}) \\
\Rightarrow \text{according to the assumption x in odd number of } A_i \\
or \\
(x \in A_{n+1} \wedge x \notin (A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n)) \\
\Rightarrow \text{ x is in one grupe + even number} \\
\text{of grupes from } A_i \text{ (according to the assumption)}\}
\end{aligned}$$

הסבר: טעות נפוצה היא לטעון כך: $x \in A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n \triangle A_{n+1}$ אזי או ש־ $x \in A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n \wedge x \notin A_{n+1}$ ואז הוא במספר אי זוגי של קבוצות לפי הנחת האינדוקציה (שזה נכון). או ש־$x \in A_{n+1} \wedge x \notin A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n$ ולכן הוא נמצא בקבוצה אחת שזה מספר אי זוגי.

זה לא נכון, כי: מהטענה ש־$x \notin A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n$ לא נובע ש־x לא נמצא באף קבוצה (x יכול להיות בחלק מהקבוצות ולא להיות בהפרש). מה שכן אפשר לומר, לפי הנחת האינדוקציה, אם $x \notin A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n$ אז x נמצא במספר זוגי של קבוצות $A_1, A_2, \cdots, A_n$. ולכן כיון ש $x \in A_{n+1}$ וגם במספר זוגי של הקבוצות $A_1, A_2, \cdots, A_n$ סה"כ x נמצא במספר אי זוגי של קבוצות.

2. תהי $A \subseteq U$ קבוצה (U הקבוצה האוניברסלית לדיוננו). נגדיר סדרת קבוצות באופן רקורסיבי:

$$A_0 = A$$

$$\forall 0 < n \in \mathbb{N} : A_n = A_{n-1}^c \cup A$$

הוכיחו שלכל n אי־זוגי $A_n = U$, ולכל n זוגי $A_n = A$..

<u>פתרון:</u>

עבור n אי־זוגי נוכיח באינדוקציה. בסיס: $A_1 = A_0^c \cup A = A^c \cup A = U$. נניח נכונות ל־$n$ ונוכיח ל־$n+2$:

$$A_{n+2} = A_{n+1}^c \cup A = (A_n^c \cup A)^c \cup A = (A_n \cap A^c) \cup A \overset{*}{=} (U \cap A^c) \cup A = A^c \cup A = U$$

כאשר בשיוויון $*$ השתמשנו בהנחת האינדוקציה.

כעת, עבור n זוגי: ראשית עבור $n=0$ הדבר נכון לפי הגדרה. עבור $n \geq 2$ זוגי נשים לב ש־

$$A_n = A_{n-1}^c \cup A$$

אבל לפי מה שהוכחנו לגבי אי־זוגי נקבל ש $A_{n-1}^c = \phi$ ולכן נקבל

$$A_n = A_{n-1}^c \cup A = \phi \cup A = A$$

3. הוכיחו שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

<u>פתרון:</u>

בסיס האינדוקציה: עבור $n=1$ נקבל $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$.

נניח נכונות ל־n ונוכיח עבור $n+1$. כלומר צריך להוכיח את הגרירה:

$$\frac{1}{1 \cdot 2}+\frac{1}{2 \cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \Rightarrow \frac{1}{1 \cdot 2}+\frac{1}{2 \cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

ואכן נקבל:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

כאשר השיוויון נובע מהנחת האינדוקציה. כעת נעשה מכנה משותף ונקבל:

$$\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$$

כדרוש.

4. הוכיחו או הפריכו:

א. $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$.

ב. $P(A\cup B)\subseteq P(A)\cup P(B)$.

ג. $P(A\cup B)\supseteq P(A)\cup P(B)$.

ד. $P(A\triangle B)=P(A)\triangle P(B)$.

פתרון:

א. הוכחה: $X\in P(A)\cap P(B)$ אמ"ם $X\subseteq A\wedge X\subseteq B$ אמ"ם $X\subseteq A\cap B$ אמ"ם $X\in P(A\cap B)$.

ב. הפרכה: $A=\{1\},B=\{2\}$ אזי $P(A)\cup P(B)=\{\phi,\{1\}\}\cup\{\phi\{2\}\}=\{\phi,\{1\},\{2\}\}\not\supseteq\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}=P(\{1,2\})=P(A\cup B)$.

ג. הוכחה: יהי $X\in P(A)\cup P(B)$, לכן $X\subseteq A\vee X\subseteq B$. אם $X\subseteq A$ אז נקבל ש־$X\subseteq A\cup B$, ולכן $X\in P(A\cup B)$. באותו אופן, אם $X\subseteq B$ אז נקבל ש־$X\subseteq A\cup B$, ולכן $X\in P(A\cup B)$.

ד. הפרכה: לכל שתי קבוצות שוות $A=B$ נקבל ש־ $P(A)=P(B)$ ולכן $P(A)\triangle P(B)=\phi$ אבל $P(A\triangle B)=P(\phi)=\{\phi\}\neq\phi$. תבחרו איזה קבוצות שוות שאתם רוצים וזו תהיה ההפרכה...

5. מצאו את צורת CNF ואת צורת DNF של הפסוק $p\wedge(q\to(r\vee p))$.

פתרון:

נתבונן בטבלת האמת של הפסוק:

p	q	r	$p\wedge(q\to(r\vee p))$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

כעת את צורת DNF נבנה בעזרת ארבעת השורות האחרונות בטבלה, שנותנות לפסוק ערך 1.

$$D_1=p\wedge\neg q\wedge\neg r$$

$$D_2 = p \wedge \neg q \wedge r$$

$$D_3 = p \wedge q \wedge \neg r$$

$$D_4 = p \wedge q \wedge r$$

ובסה"כ נקבל

$$p \wedge (q \rightarrow (r \vee p)) \equiv D_1 \vee D_2 \vee D_3 \vee D_4$$

עבור צורת CNF נשתמש בארבעת השורות הראשונות:

$$C_1 = p \vee q \vee r$$

$$C_2 = p \vee q \vee \neg r$$

$$C_3 = p \vee \neg q \vee r$$

$$C_4 = p \vee \neg q \vee \neg r$$

ונקבל

$$p \wedge (q \rightarrow (r \vee p)) \equiv C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge C_4$$

וכמבון שימו לב שמתקיים:

$$C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge C_4 \equiv D_1 \vee D_2 \vee D_3 \vee D_4$$

כלומר הפסוקים שקולים.

הערה: מבלי שימת לב יצא

$$p \wedge (q \rightarrow (r \vee p)) \equiv p$$

והפסוק

$$p$$

עונה להגדרות צורת CNF וצורת DNF גם יחד, והוא מתקבל כתשובה נכונה עבור שניהם. בכל מקרה, רציתי להבהיר את התהליך. אכן, בתהליך זה עלולים לקבל פסוק ארוך שיש פסוק קצר יותר שגם הוא מצורה המבוקשת השקול לו.

6. א. הוכיחו כי $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\} \iff [(a=c)\wedge(b=d)]$

הערה: זהו תרגיל המראה כי ניתן להגדיר זוג סדור ע"י קבוצות בלבד: $(a,b) := \{\{a\},\{a,b\}\}$.

הדרכה: אם יש שיוויון בין הקבוצות, לאיבר $\{a\}$ יש שתי אפשרויות מהו בקבוצה השנייה. הסיקו שבכל מקרה נקבל $a=c$. כעת לאיבר $\{a,b\}=\{c,b\}$ יש שתי אפשרויות. הסיקו משתיהן את השיוויון השני $b=d$.

ב. מצאו דוגמא כך ש: $\{\{a\},b\}=\{\{c\},d\}$ אבל **לא מתקיים** $[(a=c)\wedge(b=d)]$. (כלומר, זו אינה הגדרה טובה לזוג סדור).

<u>פתרון:</u>

א.

ברור כי אם צד שמאל מתקיים אזי גם צד ימין. נוכיח את הגרירה בכיוון השני:

נניח כי מתקיים שהקבוצות שוות: $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$.

אזי, $\{a\}=\{c\}\vee\{a\}=\{c,d\}$. כלומר: $a=c\vee a=c=d$ ובכל אופן מקבלים $a=c$, ולכן $\{a,b\}=\{c,b\}$.

לכן מהשיוון המקורי נקבל: $\{\{c\},\{c,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$ לכן $\{c,b\}=\{c,d\}\vee\{c,b\}=\{c\}$

כלומר: $\{\{c\},\{c,d\}\}=\{\{c\},\{c\}\}=\{\{c\}\}\vee b=d$.

ומכאן $a=b=c=d\vee b=d$, ובפרט $b=d$.

ב.

ניקח $a=2, b=\{3\}, c=3, d=\{2\}$, ואז אכן מתקיים כי $\{\{a\},b\}=\{\{c\},d\}=\{\{2\},\{3\}\}$ אבל $a\neq c$, $b\neq d$.

7. תהיינה A,B,C,D קבוצות. הוכיחו או הפריכו:

א. $(A\cap C)\times(B\cap D)=(A\times B)\cap(C\times D)$.

ב. $(A\cup C)\times(B\cup D)\subseteq(A\times B)\cup(C\times D)$.

ג. $(A\cup C)\times(B\cup D)\supseteq(A\times B)\cup(C\times D)$.

ד. אם $A=B$ אז $(A\triangle B)\times C=\phi$.

ה. אם $(A\triangle B)\times C=\phi$ אז $A=B$.

<u>פתרון:</u>

א. הוכחה:

$$(x,y)\in(A\cap C)\times(B\cap D) \iff (x\in A\wedge x\in C)\wedge(y\in B\wedge y\in D)$$

$$\iff (x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\in C\wedge y\in D) \iff (x,y)\in(A\times B)\cap(C\times D)$$

ב. הפרכה: נפריך ע"י דוגמה נגדית: ניקח: $A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{3\}, D = \{4\}$.

אזי, הזוג הסדור $(1,4)$ שייך לצד ימין ולא שייך לצד שמאל ־ כלומר אין הכלה.

ג. הוכחה:

$$(x,y) \in (A \times B) \cup (C \times D) \iff ((x,y) \in A \times B) \vee ((x,y) \in C \times D) \iff (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in C \wedge y \in D)$$

$$\iff ([x \in A \wedge y \in B] \vee x \in C) \wedge ([x \in A \wedge y \in B] \vee y \in D) \implies (x \in A \vee x \in C) \wedge (y \in B \vee y \in D) \iff (x,y) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$$

שימו לב, כי במעבר היחיד שהוא גרירה בכיוון אחד, מהחלק הראשון הורדנו את התנאי ש $y \in B$, ומהחלק השני את התנאי $x \in C$, ולכן זו לא שקילות אלא רק גרירה.

ד. הוכחה: נשים לב שכאשר $A = B$ אז $A \triangle B = \phi$, ולכל קבוצה X מתקיים $\phi = X \times \phi = \phi \times X = \phi$, ולכן נקבל ש־ $(A \triangle B) \times C = \phi \times C = \phi$.

ה. הפרכה: ניקח $C = \phi, A = \{1\}, B = \{2\}$.

8. תהי A קבוצה. נגדיר יחס $R \subseteq P(A) \times P(A)$ ע"י:

$$\forall X, Y \in P(A) : XRY \iff X \cap Y \neq \phi$$

הוכיחו או הפריכו:

א. R רפלקסיבי.

ב. R סימטרי.

ג. R טרנזיטיבי.

<u>פתרון:</u>

א. הפרכה: תהי $A = \{1\}$, אז $\phi \in P(A)$, ו־ $\phi \cap \phi = \phi$, ולכן $(\phi, \phi) \notin R$. לכן R לא רפלקסיבי.

ב. הוכחה: נניח XRY כלומר $X \cap Y \neq \phi$ ולכן $Y \cap X \neq \phi$ ולכן YRX.

ג. הפרכה: ניקח $A = \{1,2\}, X = \{1\}, Y = \{1,2\}, Z = \{2\}$ אז מתקיים $XRY \wedge YRZ$ אבל $X \cap Z = \phi$ ולכן $(X,Z) \notin R$.

9. א. תהי A קבוצה ו־I קבוצת אינדקסים. נתבונן באוסף יחסים $\{R_i\}_{i \in I}$ על A. הוכיחו שאם לכל $i \in I$ היחס R_i הוא יחס שקילות אז היחס $R = \bigcap_{i \in I} R_i$ הינו יחס שקילות.

ב. לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן $R_n = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n | (x-y)\}$.

ידוע שלכל n R_n יחס שקילות, ומסעיף א נובע ש־ $R = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} R_n$ יחס שקילות. מצאו

את קבוצות המנה: $\mathbb{Z}/R$, $\mathbb{Z}/R_1$, $\mathbb{Z}/R_2$?

ג. על הקבוצה $A=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$ נגדיר שני יחסים, R,S, באופן הבא:

$$\forall(x,y),(z,w)\in A:(x,y)R(z,w)\iff x^2+y^2=z^2+w^2$$

$$\forall(x,y),(z,w)\in A:(x,y)S(z,w)\iff x=z$$

הראו ש R ו־S יחסי שקילות ומצאו את מחלקות השקילות: $[(0,1)]_R,[(0,1)]_S,[(0,1)]_{R\cap S}$.

<u>פתרון:</u>

א. רפלקסיביות: יהי $a\in A$, כיון שלכל $i\in I$ נתון ש־R_i יחס שקילות נקבל שלכל $i\in I$ מתקיים $(a,a)\in R_i$ ולכן, לפי הגדרת חיתוך כללי, $(a,a)\in\bigcap\limits_{i\in I}R_i=R$.

סימטריות: נניח ש־ $(a,b)\in R$, אזי לכל $i\in I$ נקבל $(a,b)\in R_i$, ולכן לכל $i\in I$ (מסימטריות השקילות) $(b,a)\in R_i$, ולכן הוא גם בחיתוך הכללי כלומר $(b,a)\in\bigcap\limits_{i\in I}R_i=R$.

טרנזיטיביות: נניח ש־ $(a,b),(b,c)\in R$ אז לכל $i\in I$ נקבל ש־ $(a,b),(b,c)\in R_i$, כיון ש־ R_i יחס שקילות נקבל $\forall i\in I:(a,c)\in R_i$, ולכן $(a,c)\in\bigcap\limits_{i\in I}R_i=R$.

ב. נשים לב ששני איברים שקולים לפי R_2 אמ"ם הם מאותה זוגיות (שניהם זוגיים או שניהם אי־זוגיים), לכן יש שתי מחלקות שקילות: מחלקת הזוגיים ומחלקת האי־זוגיים. כלומר:

$$\mathbb{Z}/_{R_2}=\{[0]_{R_2},[1]_{R_2}\}$$

לגבי R_1: כיון ש־ 1 מחלק כל מספר ולכן כל הפרש, אז כל המספרים שקולים זה לזה וישנה מחלקת שקילות אחת:

$$\mathbb{Z}/_{R_1}=\{[0]_{R_1}\}=\{\mathbb{Z}\}$$

לגבי R: על מנת ששני מספרים יהיו שקולים צריך שההפרש ביניהם יתחלק בכל מספר. המספר היחיד שמתחלק בכל מספר הוא 0, ולכן $(x,y)\in R\iff x-y=0\iff x=y$. כלומר קיבלנו את יחס השיוויון, כל מספר מהווה מחלקת שקילות של עצמו בלבד, כלומר:

$$\mathbb{Z}/_R=\{[a]_R|a\in\mathbb{Z}\}=\{\{a\}|a\in\mathbb{Z}\}$$

ג. לגבי R:

$$x^2+y^2=x^2+y^2$$

$$x^2 + y^2 = z^2 + w^2 \iff z^2 + w^2 = x^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 = z^2 + w^2 \wedge z^2 + w^2 = t^2 + s^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = t^2 + s^2$$

ולגבי S:

$$x = x$$

$$x_1 = x_2 \iff x_2 = x_1$$

$$x_1 = x_2 \wedge x_2 = x_3 \Rightarrow x_1 = x_3$$

כעת נשים לב ש־

$$[(0,1)]_R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus (0,0) | x^2 + y^2 = 1\}$$

שזה מעגל היחידה (המעגל מסביב לראשית ברדיוס 1).

בנוסף:

$$[(0,1)]_S = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus (0,0) | x = 0\}$$

שזה בעצם ציר ה־y ללא הראשית.

לגבי החיתוך, צריך למצוא את החיתוך בין מעגל היחידה לציר ה־y, וזה בדיוק שתי נקודות:

$$[(0,1)]_{R\cap S} = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus(0,0) | x^2+y^2 = 1 \wedge x = 0\} = \{(0,1), (0,-1)\}$$