אינפי 3, תרגול 7

21 בדצמבר 2013

נגזרת כיוונית ־דוגמאות נוספות:

דוגמה 1 נתונה הפונקציה $f(x,y) = ^3\sqrt{xy^2}$.

א.לחשב את $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(0,0)$ בכיוון הוקטור היוצרת זוית φ עם הכיוון החיובי של ציר הx?

האם ניתן להשתמש בנוסחה $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(p) = \vec{\nabla} f(p) \cdot \vec{n}$?

תשובה: תחילה נאמר כי f לא דיפר' ב־$(0,0)$ ומוודאים זאת למשל לפי הגדרת הדיפ'. הנגזרות החלקיות ב־$(0,0)$ קיימות (וגם אותן חייבים לחשב לפי הגדרה. מדוע?). נגזרות טכניות:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{3}x^{-2/3}y^{2/3}, \quad x \neq 0\\ \frac{\partial f}{\partial y}f(x,y) &= x^{1/3}\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}, \quad y \neq 0\end{aligned}$$

$$Df = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\Delta_{x-x_0}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot\Delta_{y-y_0}y$$

לפי הגדרת הנגזרת $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ וכאמור לפי הגדרת הדיפר מקבלים שאין דיפר' בנקודה זו. לכן לא ניתן להשתמש בנוסחה. נחשב נגזרת כיוונית לפי הגדרה:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(0,0) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+\cos\varphi\cdot h, 0+\sin\varphi\cdot h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{(h\cos\varphi)^{1/3}\cdot(h\sin\varphi)^{2/3}}{h} =^3 \sqrt{\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi}$$

$$\vec{n} = (\cos\varphi, \sin\varphi) \qquad ||\vec{n}|| = 1$$

$$\vec{\nabla} f(0,0)\cdot\vec{n} = 0$$

קיבלנו

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(0,0) =^3 \sqrt{\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi}$$

ב.באיזה כיוון φ הנגזרת $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(0,0)$ תהיה מקסימלית?

הערה:אי אפשר להשתמש בטענה שהנגזרת הכיוונית תהיה מקסימלית בכיוון הגרדיאנט כי הפו' לא דיפר' בנקודה זו !

נחשב max למשתנה אחד $g(\varphi) =^3 \sqrt{\cos\varphi - \cos 3\varphi} =^3 \sqrt{\cos\varphi \cdot \sin^2\varphi}$. מספיק למצוא נקודה שבה יש מקס' לפונקציה תחת ה$\sqrt{}^3$ כי זו פו' עולה:

$$\begin{aligned} \rho(\varphi) &= \cos\varphi - \cos^3\varphi \\ \rho\prime(\varphi) &= \sin\varphi - 3\cos^2\varphi(-\sin\varphi) \\ &= \sin\varphi(3\cos^2\varphi - 1) = 0 \\ \sin\varphi = 0 \quad \text{or} & \quad \cos\varphi = \sqrt{1/3} \end{aligned}$$

וע"י בדיקת הנגזרת השנייה רואים כי המקס' מתקבל כאשר $\cos\varphi = \sqrt{1/3}$.

דוגמה 2: כדור קטן מוחזק בנקודה $(2,1,10)$ על המשטח $z = 16 - x^2 - 2y^2$. משחררים את הכדור והוא מתחיל לנוע על פני המשטח למטה בהשפעת המשקל (גרביטציה) בלבד. נסמן $\vec{u} = (a,b,c)$ וקטור המראה את כיוון הנפילה המיידית של הכדור מהנקודה $(2,1,10)$. מצאו את a,b וחשב את $\vec{u}$.

1. סע' א': נקבע $z = 10$ ונסמן $f(x,y) = 16 - x^2 - 2y^2$. הכדור נופל בכיוון הירידה המקסימלית, שזה בעצם

$$-\nabla f(2,1) = (-f_x'(2,1), -f_y'(2,1)) \underset{-f_x'=-2x, -f_y'=-2y}{=} (4,4) = (a,b)$$

א. איך נמצא את c כאשר $\vec{u} = (4,4,c)$?

תשובה: נגדיר $z = f(x,y) = 16 - x^2 - 2xy^2 \Rightarrow g(x,y,z) = z + x^2 + 2y^2 - 16 =$ 0. המשטח הנתון הוא משטח גובה 0 של g, ז"א פתרון $\sqrt{}^3$ פו' של 0 $g(x,y,z) = 0$.

טענה: $\vec{\nabla} g(x_0,y_0,z_0)$ מאונך למשטח בנקודה זו.

לכן: $\vec{\nabla} g(x_0,y_0,z_0)$ מאונך גם ל-$\vec{u}$ שהוא כיוון משיק למשטח ואז: $\boxed{\vec{\nabla} g(2,1,10) \cdot \vec{u} = 0}$.

$$\vec{\nabla} g(2,1,10) = (\underbrace{g\prime_x(2,1,10)}_{4}, \underbrace{g_y'(2,1,10)}_{4}, \underbrace{g_z'(2,1,10)}_{1}) = (4,4,1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad (4,4,1)\cdot(4,4,c) &= 0 \\ \Rightarrow \quad 16 + 16 + c &= 0 \\ c &= -32 \\ \Rightarrow \quad \boxed{\vec{u} = (4,4,-32)} & \end{aligned}$$

הוכחת הטענה: תהי $g(x,y,z)$ דיפר' בתחום הגדרתה $D \subseteq \mathbb{R}^3$. נסמן $g(x,y,z) =$ C משטח רמה כלשהו של הפונקציה. הוכח שבכל נק' (x_0,y_0,z_0) , הגרדיאנט $\vec{\nabla} g(x_0,y_0,z_0)$ מאונך למשטח הנ"ל.

הוכחה: צריך להראות שאם נעביר דרך $P(x_0,y_0,z_0)$עקום חלק כלשהו בתוך המשטח, אזי הוקטור המשיק לעקום ו$\nabla \vec{g}(P)$ יהיו מאונכים. נרשום הצגה פרמטרית של עקום על משטח גובה $g(x,y,z)=C$:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \\ r(t) &= (x(t),y(t),z(t)) \end{aligned}$$

העקום עובר דרך P. וקטור משיק לעקום: $r\prime(t)=(x\prime(t),y\prime(t),z\prime(t))$ . . אנחנו טוענים ש$\boxed{\vec{\nabla} g(P)\cdot r\prime\vec{(t)}=0}$. נשים לב כי $g(x(t),y(t),z(t))=C$. לפי שרשרת:

$$\frac{\partial g}{\partial x}\cdot x\prime(t)+\frac{\partial g}{\partial u}\cdot y\prime(t)+\frac{\partial g}{\partial z}\cdot z\prime(t)=0 \quad \overset{\text{exactly the desired scalar product}}{\Longleftarrow} \quad \square$$

משוואה של מישור משיק למשטח $g(x,y,z)=C$ בנקודת השקה $P(x_0,y_0,z_0)$ תהיה $g'_x(P)\cdot(x-x_0)+g'_y(P)\cdot(y-y_0)+g'_z(P)\cdot(z-z_0)=0$.

דוגמה 3: למצוא מישור המשיק למשטח $x^2+8y^2+27z^2=21$ המקביל למישור $x+8y+18z=0$.

תשובה: כל המישורים <u>המקבילים</u> למישור הנתון הם מהצורה $x+8y+18z=d, d\in\mathbb{R}$ כדי למצוא את d צריך למצוא נקודת השקה. נסמן $P(x_0,y_0,z_0)$ נק' ההשקה ונגדיר $g(x,y,z)=x^2+8y^2+27z^2-21$.

$$\vec{\nabla} g(x_0,y_0,z_0)=(2x_0,16y_0,54z_0)$$

מאונך למישור המשיק. מצד שני וקטור מאונך למישור המשיק הוא (גרדיאנט שלו) : $(1,8,18)$. לכן $\vec{\nabla}_g(P)$ והוקטור $(1,8,18)$ מקבילים , ז"א בנקודת ההשקה יש $k\in\mathbb{R}$ כך ש:

$$\begin{aligned} (2x_0,16y_0,54z_0) &= k(1,8,18)=(k,8k,18k) \\ \Rightarrow x_0=\frac{k}{2}, \quad & y_0=\tfrac{k}{2} \quad z_0=\frac{k}{3} \\ \Rightarrow \quad & P(\tfrac{k}{2},\tfrac{k}{2},\tfrac{k}{3}) \end{aligned}$$

הנק' הנ"ל נמצאת גם על המשטח. נציב P בתור האליפסויד הנתון ונקבל $k=\pm 2$

$$\Rightarrow P(\pm 1,\pm 1,\pm 2/3)$$

אם נציב במשוואות המישור נקבל $d=\pm 21$ והמישורים

$$\boxed{x+8y+18z=\pm 21}$$