הגדרה: בהנתן קבוצה Ω משפחת קבוצות $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}(\Omega)$ תקרא **אלגברה** אם היא מקיימת:1. $\emptyset\in\mathcal{F}$, 2. אם $A\in\mathcal{F}$ אז $A^c\in\mathcal{F}$, 3. אם $A,B\in\mathcal{F}$ אז $(A\cup B)\in\mathcal{F}$.

$\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}(\Omega)$ תקרא **סיגמה־אלגברה** אם היא אלגברה והיא סגורה גם לאיחודים בני־מנייה.

הגדרה: בהנתן מרחב מדיד $(\Omega,\mathcal{F})$ פונקציה $\mu:\mathcal{F}\to[0,\infty]$ תקרא **מידה** אם היא מקיימת את התכונות הבאות:

1. $\mu(\emptyset)=0$. 2. $\mu(A)\geq 0$ לכל $A\in\mathcal{F}$. 3. **סיגמה אדיטיביות:** בהנתן קבוצות זרות $A_1,A_2,..\in\mathcal{F}$ מתקיים $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$.

תזכורת 0.1 יהא $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ מרחב מידה, מתקיימים הדברים הבאים:

1. **מונוטוניות:** עבור $A,B\in\mathcal{F}$ כך ש־ $A\subseteq B$ מתקיים $\mu(A)\leq\mu(B)$.
2. **תת־אדיטיביות:** בהנתן $A_1,A_2,...\in\mathcal{F}$ מתקיים $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$.
3. **רציפות מלמטה:** בהנתן סדרה עולה $A_n\uparrow\in\mathcal{F}$ מתקיים: $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)$
4. **רציפות מלמעלה:** בהנתן סדרה יורדת $A_n\downarrow\in\mathcal{F}$ כך שקיים N שעבורו $\mu(A_N)<\infty$ מתקיים: $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)$

$\limsup_{n\to\infty}E_n=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n>m}E_n$ $\liminf_{n\to\infty}E_n=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n>m}E_n$

הלמה של Fatou: יהא $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהיו $E_1,E_2,...\in\mathcal{F}$, אזי: $\mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty}E_n)\leq\liminf_{n\to\infty}\mathbb{P}(E_n)$

הלמה הראשונה של בורל קנטלי: יהא $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ותהא $E_1,E_2,...\in\mathcal{F}$ כך ש־ $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(E_n)<\infty$ אזי $\mathbb{P}\left(\limsup\limits_{n\to\infty}E_n\right)=0$.

הגדרה: אי תלות: יהא $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ותהא תהא $\{\mathcal{F}_i\}_{i=1}^{\infty}$ סדרה של תת־σ־אלגבראות $\mathcal{F}_i\subseteq\mathcal{F}$:

1. נאמר ש־ $\{\mathcal{F}_i\}_{i=1}^{\infty}$ בלתי תלויה אם לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל בחירה של $A_i\in\mathcal{F}_i$ $(i=1,...,n)$ מתקיים $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)$.
   (א) נאמר שסדרת מאורעות $A_1,A_2,...\in\mathcal{F}$ היא בלתי תלויה אם הסדרה $\sigma(\{A_i\})=\{\emptyset,\Omega,A_i,A_i^c\}$ בלתי־תלויה.
   (ב) נאמר שסדרת משתנים מקריים היא ב"ת אם הסיגמה אלגבראות שנוצרות מהם הן ב"ת

הגדרה יהא $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות נאמר שסדרה $\{\mathcal{F}_i\}_{i=1}^{\infty}$ של תת־σ־אלגבראות $\mathcal{F}_i\subseteq\mathcal{F}$ **בלתי־תלויה בזוגות** אם לכל $i\neq j$ ו־ $A\in\mathcal{F}_i$ ו־ $B\in\mathcal{F}_j$ מתקיים $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$. באופן מתאים נאמר שסדרת מאורעות $E_1,E_2,...\in\mathcal{F}$ בלתי תלויים בזוגות אם אם הסדרה $\sigma(\{E_i\})=\{\emptyset,\Omega,E_i,E_i^c\}$ בלתי־תלויה בזוגות.

הלמה השנייה של בורל־קנטלי: יהא $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ותהא $E_1,E_2,...\in\mathcal{F}$ סדרת מאורעות ב"ת כך ש־ $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(E_n)=\infty$ אזי $\mathbb{P}\left(\limsup\limits_{n\to\infty}E_n\right)=1$.

הגדרה: יהא $(\Omega,\mathcal{F})$ מרחב מדיד ותהא $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת σ־אלגבראות חלקיות של $\mathcal{F}$, נגדיר:

$$\mathcal{T}_n=\sigma(\{\mathcal{F}_n,\mathcal{F}_{n+1},...\})=\sigma\left(\bigcup_{n>m}\mathcal{F}_n\right)$$

כמו כן נגדיר $\mathcal{T}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathcal{T}_n$, הנ"ל מכונה σ־**אלגברת הזנב** של הסדרה $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ (נשים לב כי $\{\emptyset,\Omega\}\subseteq\mathcal{T}$ ולכן הנ"ל לא ריקה).

משפט 0־1 של קולמוגורוב: יהא $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ותהא $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}(\mathcal{F})$ סדרה ב"ת של σ־אלגבראות אזי לכל $A\in\mathcal{T}$ מתקיים $\mathbb{P}(A)\in\{0,1\}$.

הגדרה: פונקציה מדידה יהיו $(X,\mathcal{F})$ ו־ $(Y,\mathcal{G})$ מרחבים מדידים. העתקה $g:X\to Y$ תקרא $(\mathcal{F},\mathcal{G})$־מדידה אם $g^{-1}(B)\in\mathcal{F}$ לכל $B\in\mathcal{G}$.

הגדרה: משתנה מקרי יהיו $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות, משתנה מקרי (מ"מ) הוא פונקציה $\mathcal{F}$־מדידה מ־ $(\Omega,\mathcal{F})$ למרחב מדיד $(Y,\mathcal{G})$ כלשהו. משתנה מקרי ממשי הוא פונקציה $\mathcal{F}$־מדידה מ־ $(\Omega,\mathcal{F})$ ל־ $(\mathbb{R},\mathcal{B})$.

התכנסות כמעט תמיד של סדרת משתנים מקריים

יהא $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ותהא $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מ"מ. נאמר כי הנ"ל מתכנסת כמעט־תמיד (כ"ת) למ"מ X אם:

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega\in\Omega\mid\lim_{n\to\infty}X_n(\omega)\neq X(\omega)\right\}\right)=0$$

כלומר X_n מתכנסת נקודתית ל־ X פרט אולי על תת־קבוצה מהסתברות אפס. נסמן זאת $X_n\xrightarrow{\text{a.s}}X$.

התכנסות בהתפלגות (Convergence in Distribution/Law)

תהא X_n סדרת מ"מ (לא בהכרח באותו מרחב הסתברות) נאמר ש־ X_n מתכנסת בהתפלגות למ"מ X ונסמן $X_n\xrightarrow{D}X$ או $\mathcal{L}(X_n)\xrightarrow{n\to\infty}\mathcal{L}(X)$ אם $F_n(t)\xrightarrow{n\to\infty}F(t)$ בכל t שהיא נקודת רציפות של F.

אי־שוויון ינסן (Jensen Inequality):

תהא φ פונקציה ממשית קמורה בקטע (a,b) ויהא X מ"מ בעל תוחלת שמקבל את ערכיו ב־ (a,b) אזי: $\varphi(\mathbb{E}(X))\leq\mathbb{E}[\varphi(X)]$ בתנאי ש־ $\mathbb{E}[\varphi(X)]$ קיים (אפילו במובן הרחב) ובפרט אם $\mathbb{E}[|\varphi(X)|]<\infty$

התכנסות בהסתברות

יהא $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות. נאמר שסדרת מ"מ X_n מתכנסת בהסתברות ונסמן $X_n\xrightarrow{\mathbb{P}}X$ אם לכל $\varepsilon>0$:

$$\mathbb{P}(|X_n-X|>\varepsilon)\xrightarrow{n\to\infty}0$$

או לחילופין לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq N$ מתקיים $\mathbb{P}(|X_n-X|>\varepsilon)<\varepsilon$.

למה: התכנסות בהסתברות גוררת התכנסות כ"ת של תת־סדרה:

תהא X_n סדרת מ"מ כך ש־ $X_n\xrightarrow{\mathbb{P}}X$ אזי קיימת ת"ס X_{n_k} כך ש־ $X_{n_k}\xrightarrow{\text{a.s}}X$.

למה: התכנסות כ"ת גוררת התכנסות בהסתברות גוררת התכנסות בהתפלגות:

יהא $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ותהא X_n סדרת מ"מ ו־ X מ"מ. אזי:

$$X_n\xrightarrow{\text{a.s}}X\Longrightarrow X_n\xrightarrow{\mathbb{P}}X\Longrightarrow\mathcal{L}(X_n)\xrightarrow{n\to\infty}\mathcal{L}(X)$$

משפט 0.2 משפט ההתכנסות הנשלטת (*Dominated Convergence Theorem*):

תהא X_n סדרת מ"מ כך ש־ $X_n\xrightarrow{\text{a.s}}X$ או $X_n\xrightarrow{\mathbb{P}}X$. יהא Y מ"מ בעל תוחלת כך ש־ $|X_n|\leq Y$ לכל n אזי $\mathbb{E}[X_n]\xrightarrow{n\to\infty}\mathbb{E}[X]$.

משפט: בבור משתנה מקרי X מתקיימים הדברים הבאים:

1. **א"ש מרקוב:** לכל $a>0$ מתקיים $\mathbb{P}(|X|\geq a)\leq\frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}$
2. **א"ש צ'בישב:** לכל $a>0$ מתקיים $\mathbb{P}(|X|\geq a)\leq\frac{\mathbb{E}[X^2]}{a^2}$ ובפרט אם $\mathbb{E}[X^2]<\infty$ אז: $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}[X]|\geq a)\leq\frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}$

משפט פוביני (בגרסת הסתברותית) אם X,Y הם משתנים מקריים ב"ת ובעלי תוחלת אזי $\mathbb{E}[X\cdot Y]=\mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y]$.

הלמה השנייה של בורל קנטלי עבור מ"מ ב"ת בזוגות: יהא $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהיו $A_1,A_2,...\in\mathcal{F}$ מאורעות ב"ת בזוגות כך ש־ $\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_i)=\infty$ אזי $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}A_n\right)=1$.

החוק החלש של המספרים הגדולים: תהא X_i סדרת מ"מ שווי התפלגות, ב"ת בזוגות ובעלי תוחלת $\mathbb{E}[X_i]=\mu$. נסמן $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$, אזי $\frac{1}{n}S_n\xrightarrow{\mathbb{P}}\mu$.

החוק החזק של המספרים הגדולים: תהא X_i סדרת משתנים מקריים ש"ה, ב"ת בזוגות ובעלי תוחלת $\mathbb{E}[X_i]=\mu$ אזי $\frac{1}{n}S_n\xrightarrow{\text{a.s}}\mu$.

הגדרה: יהא $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות, תהא $\mathcal{G}\subseteq\mathcal{F}$ תת־σ־אלגברה ויהא X מ"מ $\mathcal{F}$־מדיד כך ש־ $\mathbb{E}[|X|]<\infty$ ($X\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$). נאמר שמ"מ Y הוא **תוחלת מותנית** של X בהנתן $\mathcal{G}$ ונסמן $Y=\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ אם:

1. $Y\in L^1(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ ובפרט Y הוא $\mathcal{G}$־מדיד.
2. (א) לכל $A\in\mathcal{G}$ מתקיים $\mathbb{E}[Y\cdot\mathbb{1}_A]=\mathbb{E}[X\cdot\mathbb{1}_A]$ (לכל $A\in\mathcal{G}$ מתקיים $\int_A Yd\mathbb{P}=\int_A Xd\mathbb{P}$).

הגדרה: בהנתן מרחב הסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ **פילטרציה** היא סדרה עולה $\mathcal{F}_0\subseteq\mathcal{F}_1\subseteq...$ של תת־σ־אלגבראות של $\mathcal{F}$.
תהליך סטוכסטי X_n יקרא **מותאם** ביחס לפילטרציה $\mathcal{F}_n$ אם X_n הוא $\mathcal{F}_n$־מדיד לכל n.

לכל תהליך X_n יש **פילטרציה טבעית** $\mathcal{F}_n=\sigma\left(X_1,...,X_n\right)$. זוהי הפילטרציה המינימלית שעבורה התהליך הנ"ל מתואם.
הגדרה: תהליך סטוכסטי $X_n\in L^1\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}\right)$ יקרא **מרטינגל** ביחס לפילטרציה $\mathcal{F}_n$ אם X_n הוא $\mathcal{F}_n$־מותאם ובנוסף:
הגדרה: תהליך סטוכסטי $\{C_n\}$ יקרא **צפוי** ביחס ל־ $\mathcal{F}_n$ אם C_n הוא $\mathcal{F}_{n-1}$־מדיד לכל n.

טרנספורם־מרטינגל (Martingale Transform)

יהא X_n מרטינגל ביחס לפילטרציה $\mathcal{F}_n$ ויהא C_n תהליך צפוי ביחס ל־ $\mathcal{F}_n$. נגדיר תהליך $\left\{(C\bullet X)_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ע"י:

$$(C\bullet X)_n=\sum_{k=1}^{n}C_k\left(X_k-X_{k-1}\right)$$

אם C_n צפוי וחסום אז התהליך $Y_n:=(C\bullet X)_n$ הוא מרטינגל שמתחיל באפס.
הגדרה: בהנתן מרחב הסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ ופילטרציה $\mathcal{F}_n$ משתנה מקרי $T:\Omega\to\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ יקרא **זמן עצירה** אם $\{T\le n\}\in\mathcal{F}_n$ לכל n.

למה: אם T_1,T_2 הם זמני עצירה ביחס לפילטרציה $\mathcal{F}_n$ אז $\max\{T_1,T_2\}$ ו־ $\min\{T_1,T_2\}$ הם גם כן זמני עצירה.
למה: התהליך $X_{T\wedge n}:=X_{\min(T,n)}$ הוא מרטינגל. (המרטינגל העצור)

משפט 0.3 משפט ־ *Doob's Optional Stopping Theorem* (*OST*):

יהיו X_n מרטינגל ו־ T זמן עצירה ביחס לפילטרציה $\mathcal{F}_n$ כך שמתקיים אחד מהתנאים הבאים:

1. $T\overset{a.s}{\le}K$ (כלומר $\exists K\,\mathbb{P}(T\le K)=1$).
2. $T\overset{a.s}{<}\infty$ ו־ $X_{\min(T,n)}$ חסום יוניפורמית כ"ת (כלומר $\exists K\,\forall n\,\mathbb{P}\left(\left|X_{\min(T,n)}\right|\le K\right)=1$).
3. $\mathbb{E}[T]<\infty$ וההפרשים $\left|X_{\min(T,n+1)}-X_{\min(T,n)}\right|$ חסומים יוניפורמית כ"ת.

אזי X_T מוגדר היטב כמעט תמיד ומתקיים $\mathbb{E}[X_T]=\mathbb{E}[X_0]$.

על\תת־מרטינגל

תהליך סטוכסטי X_n יקרא:

1. **על־מרטינגל** ביחס לפילטרציה $\mathcal{F}_n$ אם $\mathbb{E}\left[X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right]\le X_n$ לכל n.
   (א) **תת־מרטינגל** ביחס לפילטרציה $\mathcal{F}_n$ אם $\mathbb{E}\left[X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right]\ge X_n$ לכל n.

טענה: אם X_n הוא על־מרטינגל ו־ $0\le C_n\le K$ הוא תהליך חסום אז התהליך $Y_n:=(C\bullet X)_n$ הוא על־מרטינגל.

מסקנה 0.4 משפט *OST* עבור על־מרטינגלים:

אם T הוא זמן עצירה ו־ X_n הוא על־מרטינגל אז $X_{\min(T,n)}$ הוא על־מרטינגל.
אם T הוא זמן עצירה ו־ X_n הוא על־מרטינגל אזי:

- התנאים של משפט OST גוררים ש־ $\mathbb{E}[X_T]\le\mathbb{E}[X_0]$.
- במקום תנאי 2 מספיק לדרוש ש־ $T\overset{a.s}{<}\infty$ ו־ $X_n\overset{a.s}{\ge}0$ לכל n.

משפט 0.5 אי־שוויון הופדינג־אזומה:

אזומה־הופדינג

א אם $\{M_i\}_{i=1}^{\infty}$ הוא מרטינגל כך ש $|M_{i+1}-M_i|\le K$ כ"ת מתקבל חסם דו־צדדי מהצורה:

$$\mathbb{P}\left(|M_k-\mathbb{E}\left[M_k\right]|\ge\lambda\right)=\mathbb{P}\left(|M_k-M_0|\ge\lambda\right)\le 2e^{-\frac{\lambda^2}{2kK^2}}$$

יהא X_n מרטינגל חסום ($\exists K\,:\,\forall n\,\mathbb{P}\left(|X_n|\le K\right)=1$) אזי קיים מ"מ Y כך ש־ $X_n\xrightarrow{a.s}Y$.

משפט 0.6 משפט ־ *Levy's Upward Theorem*:

יהא X מ"מ חסום ותהא $\mathcal{F}_n$ פילטרציה אזי $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}_n\right]=\mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}_\infty\right]$ כאשר $\mathcal{F}_\infty=\sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n\right)$

1 שרשראות מרקוב:

הגדרה 1.1 שרשרת מרקוב (בזמן בדיד):
סדרת משתנים מקריים בדידים $X_n:\Omega\to\mathcal{S}$ המקבלים ערכים בקבוצה $\mathcal{S}$ תקרא **שרשרת מרקוב** אם ההתפלגות של X_{n+1} בהנתן $X_0,...,X_n$ היא פונקציה של X_n בלבד במובן שקיימת מטריצה\פונקציה $P:\mathcal{S}\times\mathcal{S}\to[0,1]$ כך ש:

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1}=y\,|\,X_0=a_0,X_1=a_1,...,X_n=x\right)=P\left(x,y\right)$$

בהנתן שרשרת מרקוב $(\mathcal{S},P)$ נאמר ש־ π היא מידה סטציונרית על $\mathcal{S}$ אם $\pi=\pi P$.

הערה 1.2 בפרט אם π היא מידת הסתברות נאמר ש־ π היא התפלגות סטציונרית.

משפט 1.3 לשרשרת מרקוב עם מרחב מצבים סופי קיימת התפלגות סטציונרית:

בהנתן שרשרת מרקוב $(\mathcal{S},P)$ כך ש־ $\mathcal{S}$ סופית קיימת התפלגות סטציונרית על $\mathcal{S}$.

הגדרה 1.4 שרשרת מרקוב אי־פריקה:
שרשרת מרקוב $(\mathcal{S},P)$ תקרא אי־פריקה אם לכל $x,y\in\mathcal{S}$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש־ $P^n\left(x,y\right)>0$.

בהנתן שרשרת מרקוב $(\mathcal{S},P)$ פונקציה $h:\mathcal{S}\to\mathbb{R}$ תקרא הרמונית אם $h=Ph$. כלומר $h\left(x\right)=\sum\limits_{y\in\mathcal{S}}P\left(x,y\right)h\left(y\right)$

משפט 1.5 פונקציה הרמונית על שרשרת מרקוב סופית ואי פריקה היא קבועה:

תהא $(\mathcal{S},P)$ שרשרת מרקוב אי־פריקה עם מרחב מצבים סופי ותהא $h:\mathcal{S}\to\mathbb{R}$ פונקציה הרמונית על P אזי h קבועה.

מסקנה 1.6 שרשרת מרקוב אי־פריקה עם מרחב מצבים סופי היא בעלת התפלגות סטציונרית יחידה:

לשרשרת מרקוב $(\mathcal{S},P)$ אי־פריקה ובעלת מרחב מצבים סופי קיימת התפלגות סטציונרית יחידה.

הגדרה 1.7 בהנתן שרשרת מרקוב $(\mathcal{S},P)$ ו־ $x\in\mathcal{S}$ נסמן: $A_x=\{n\ge0\,|\,P^n\left(x,x\right)>0\}$ נגדיר $a_x=\gcd\left(A_x\right)$ הנ"ל מכונה המחזור של x.

למה 1.8

מחזור הוא תכונה מחלקתית

שרשרת מרקוב $(\mathcal{S},P)$ תקרא **לא־מחזורית** אם $a_x=1$ לכל $x\in\mathcal{S}$.

טענה תהא $(\mathcal{S},P)$ שרשרת מרקוב אי־פריקה סופית ולא־מחזורית אזי קיים $r>0$ כך שלכל $x,y\in\mathcal{S}$ מתקיים $P^r\left(x,y\right)>0$.

משפט 1.9 עבור שרשרת מרקוב סופית, אי־פריקה ולא מחזורית קיימת התכנסות להתפלגות סטציונרית:

תהא $(\mathcal{S},P)$ שרשרת מרקוב אי־פריקה ולא מחזורית עם $\mathcal{S}$ סופית. אזי קיים התפלגות π כך שלכל התפלגות μ מתקיים $\pi \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu P^n$.
ליתר דיוק קיים $0<\alpha<1$ כך שלכל μ_0 מתקיים $\|\mu P^n-\pi\|_{L_1}\le 2\alpha^n$.

הגדרה 1.10 מצב נשנה בשרשרת מרקוב
בהנתן שרשרת מרקוב $(\mathcal{S},P)$ מצב $s\in\mathcal{S}$ יקרא **נשנה** אם $\mathbb{P}_s\left(T_s^+<\infty\right)=1$ כאשר:

$$T_s^+=\min\left\{n\ge 1\,|\,X_n=s\right\}$$

הערה 1.11 מצב שאיננו נשנה מכונה מצב **חולף**. כמו כן מאופן ההגדרה ברור שמצב נשנה הוא מצב שבו נבקר אינסוף פעמים ומצב חולף הוא מצב שבו נבקר רק מספר סופי של פעמים.