

תרגיל 5

1. לכל אחת מסדרות הפונקציות הבאות בדקו לאיזה פונקציה גבולית היא מתכנסת נקודתית בתחום המתאים והאם ההתכנסות היא במידה שווה.

א. $f_n(x) = \frac{1}{1+2^n x^n}, x \in [1, 2]$ ב. $f_n(x) = \frac{1}{1+2^n x^n}, x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

ג. $f_n(x) = nxe^{-n^2x}, x \in [0, \infty)$ ד. $f_n(x) = x^n e^{-n^2x}, x \in (0, \infty)$

ה. $f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right), x \in (-\infty, \infty)$ ו. $f_n(x) = (1-x)^{\frac{1}{2n+1}}, x \in [0, 2]$

2. בדקו האם טורי הפונקציות הבאים מתכנסים במידה שווה בתחום המתאים.

א. $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin^n(x), x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1} - x^n}{\sqrt{n}}, x \in [0, 1]$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}, x \in [0, 2)$

3. א. הוכיחו שהטור $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx^2}$ מתכנס ושטור הנגזרות שלו מתכנס במידה שווה בקטע $[1, 2]$ ובעזרתו

חשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$

ב. הוכיחו שהטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x)^n (1+x)^n}{n!}$ מתכנס ושטור הנגזרות שלו מתכנס במידה שווה בקטע

$[0, 2]$ ובעזרתו חשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 3^{n-1}}{(n-1)!}$. רמז: מהו טור החזקות של e^{1-x^2} ?

4. הוכיחו את הזהות

$$\frac{\arctan(t)}{2} + \frac{t}{2t^2+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)t^{2n+1}}{2n+1} \left(= t - \frac{2t^3}{3} + \frac{3t^5}{5} - \dots \right)$$

כאשר $0 \leq t < 1$ לפי השלבים הבאים:

א. הוכיחו את הזהות $\frac{1}{(1+x^2)^2} = 1 - 2x^2 + 3x^4 - 4x^6 + \dots$ כאשר $0 \leq x < 1$.

רמז: השתמשו בפיתוח של טור חזקות ידוע ואז השתמשו בגזירה איבר איבר.

ב. הוכיחו שעבור $0 \leq t < 1$ קבוע טור הפונקציות בסעיף א מתכנס במידה שווה בתחום $0 \leq x \leq t$.

ג. הוכיחו שניתן להשתמש במשפט האינטגרציה איבר איבר עבור הטור בסעיף א כאשר $0 \leq x \leq t$ והשתמשו בזהות שהוכחנו בתירגול:

$$I_{m+1} = \frac{x}{2m(1+x^2)^m} + I_m \frac{2m-1}{2m}, \quad I_m = \int \frac{dx}{(1+x^2)^m}$$