

תרגיל בית 5 - תורת גלואה סמסטר א', תשע"ז

שאלה 1.

1. יהי F שדה ממאפיין p , ו $a \in F$. הוכיחו כי $x^p - x + a$ הוא פולינום ספרבילי.

שאלה 2. חשבו את חבורת גלואה של ההרחבות הבאות:

1. שדה הפיצול של $x^3 - 5$ מעל \mathbb{Q} .

2. שדה הפיצול של $x^7 - 1$ מעל \mathbb{Q} .

3. שדה הפיצול של $x^4 + 1$ מעל $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ (שימו לב ש $\rho_8 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$).

שאלה 3. היעזרו בשאלה הקודמת וחשבו את $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}\rho_3 - 3\sqrt[3]{5^2}\rho_3] : \mathbb{Q}]$.

הנחיה: שימו לב שההרחבה מוכלת בשדה הפיצול שבסעיף הראשון של השאלה הקודמת. כדי לדעת כמה שורשים יש לפולינום המינימלי של α , חשבו $\sigma(\alpha)$ לכל איברי החבורה שחישבתם שם.

שאלה 4. יהי $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ ו E שדה הפיצול של $f(x)$. הוכיחו כי אם ל $f(x)$ יש שורש מרוכב אז $|Gal(E/\mathbb{Q})|$ הוא זוגי.

שאלה 5. הוכחתם בהרצאה שאם $\alpha, \beta \in E$ הם שורשים של פולינום אי-פריק $f(x) \in F[x]$ אז יש אוטומורפיזם $\sigma \in Gal(E/F)$ כך ש $\sigma(\alpha) = \beta$. הוכיחו את הכיוון ההפוך: אם E/F שדה הפיצול של פולינום $f(x) \in F[x]$ ו $Gal(E/F)$ פועלת טרנזיטיבית על שורשי $f(x)$ אז $f(x)$ הוא אי-פריק מעל F .