אלגברה לינארית 1 ‑ תרגול 4

21 ביולי 2020

1 השלמת אלגברת מטריצות

1.1 עקבה

תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, נגדיר $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$. למשל $tr(I_3) = 3$.

תרגיל: תהא $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, ונניח שמתקיים: $tr(AA^t) = 0$. הוכיחו: $A = 0$.

פתרון: נחשב:

$$tr(AA^t) = \sum_{i=1}^{m} AA^t_{i,i} = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}(A^t)_{k,i}) = \sum\sum A^2_{i,k}$$

יוצא לנו שהאיבר ה־i,i הוא סכום ריבועי השורה ה־i של A. ובסה"כ יוצא שהעקבה היא סכום ריבועי כל איברי A. סכום של ריבועים זה תמיד גדול או שווה 0, והוא שווה 0 אמ"ם כל הריבועים הינם 0. כיון שנתון $tr(AA^t) = 0$, נקבל שכל הריבועים הינם 0.

2 הפיכות

נדבר כרגע רק על מטריצות ריבועיות.

מטריצה ריבועית A נקראת הפיכה אם קיימת B כך ש־ $AB = BA = I$.

ראיתם: המטריצה ההופכית הינה יחידה. מספיק להראות שיש B כך ש־ $AB = I$.

דוג': ההופכית של $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ היא A, כי:

$$A^2 = I$$

את ההופכית מסמנים A^{-1}.

ראיתם בהרצאה: לכל מטריצות $A_1, \dots, A_k$, הן הפיכות אם ורק אם המכפלה שלהן $A_1 \cdot \dots \cdot A_k$ הפיכה. במילים קצרות: **מכפלה היא הפיכה אמ"ם המוכפלות הפיכות**.

תרגילים:

1. תהא A ריבועית. הוכיחו:

(א) A הפיכה אמ"ם קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- A^n הפיכה.

(ב) A הפיכה אמ"ם לכל $n \in \mathbb{N}$ כך ש- A^n הפיכה.

פתרון: א. $\Leftarrow$: נניח A הפיכה, אז ניקח $n = 1$ ואכן $A^1 = A$ הפיכה.
$\Rightarrow$: נתון שקיים n כך ש- A^n הפיכה, מהמשפט לעיל, ידוע שמכפלת מטריצות היא הפיכה אמ"ם כל המוכפלות הפיכות. כאן יש לנו $A \cdot A \cdots \cdot A$ ולכיון שהמכפלה הפיכה גם A הפיכה.
ב. $\Leftarrow$: נתון ש-A הפיכה, ולפי המשפט לעיל מכפלה של הפיכות היא הפיכה ולכן לכל n נקבל A^n הפיכה.
$\Rightarrow$: נתון שלכל n A^n הפיכה, לכן בפרט עבור $n = 1$ נקבל $A = A^1$ הפיכה.
מסקנה: קיים n כך ש- A^n הפיכה אמ"ם לכל n מתקיים ש- A^n הפיכה.

2. הוכיחו: A הפיכה אמ"ם A^t הפיכה.
פתרון: $\Leftarrow$: נתון A הפיכה. נסמן את ההופכית ב- A^{-1} ונקבל: $AA^{-1} = I$. נשים לב:

$$I = I^t = (AA^{-1})^t = (A^{-1})^t A^t$$

קיבלנו: ההופכית של המשוחלפת היא המשוחלפת של ההופכית. לכן נהוג לסמן את ההופכית של המשוחלפת ב- A^{-t}.
הכיוון השני הוא הכיוון הראשון על A^t, אז אין צורך לעשות אותו במיוחד.

3. הוכיחו שמטריצה עם עמודת אפסים איננה הפיכה.
פתרון: נניח בשלילה שהיא הפיכה, ולכן יש B כך ש- $BA = I$. נניח שעמודת האפסים של A היא העמודה ה-i, בעזרת כפל עמודה נקבל $e_i = C_i(I) = C_i(BA) = BC_i(A) = B \cdot 0 = 0$, בסתירה לכך שכידוע $e_i \neq 0$ (כי הרכיב ה-i של e_i הינו 1 ולא 0).

2.1 אלגוריתם למציאת ההופכית

כזכור דיברנו על פעולות שורה. מסבתר שפעולת שורה שקולה לכפל במטריצה הפיכה משמאל. המטריצה היא: המטריצה המתקבלת מ-I לאחר אותה פעולה. לדוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

היא מוסיפה לשורה הראשונה את השנייה והשלישית.

משפט: אם $E=\rho(I)$ מטריצה אלמנטרית (מטריצה שעושה פעולת שורה/עמודה אלמנטרית) אז E הפיכה ומתקיים: $E^{-1}=\rho^{-1}(I)$. לדוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

משפט: A הפיכה אמ"ם הצורה הקנונית שלה היא I. לכן בהינתן מטריצה A נדרג אותה לצורה קנונית, ואז: אם קיבלנו I אז A הפיכה, ואם לא אז A לא הפיכה.

במקרה שקיבלנו את I נוכל להיעזר בדירוג כדי למצוא את ההופכית: נסמן את מטריצות הדירוג ב־ $E_1,\dots,E_k$. נקבל: $E_k\cdot\dots\cdot E_1\cdot A=I$, ולכן $E_k\cdot\dots\cdot E_1\cdot I=E_k\cdot\dots\cdot E_1=A^{-1}$. כלומר, הפעלת אותן פעולות באותו סדר על I נותנת את A^{-1}. איך זה נראה בפועל:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}R_3\to R_3]{R_1\leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2-R_3\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-R_2\to R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

קיבלנו שהצורה הקנונית של A היא I, ולכן A הפיכה ומהאלגוריתם נקבל:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

תרגילים:

1. תהא A ריבועית כך שמתקיים: $A+A^2$ הפיכה. הוכיחו: $A, A+I$ הפיכות.
פתרון: לפי חוק הפילוג נקבל: $A+A^2=A(A+I)$, ולכן המכפלה $A(A+I)$ הפיכה, ולכן המוכפלות הפיכות.

2. הגדרה: מטריצה $A\neq 0$ נקראת "מחלקת אפס" אם קיימת $B\neq 0$ כך ש־ $AB=0$.
הוכיחו: $A\neq 0$ לא הפיכה אמ"ם היא מחלקת אפס.
פתרון: $\Rightarrow$: נתון שיש $B\neq 0$ כך ש־ $AB=0$. נניח A הפיכה לכן יש A^{-1}, ואז מהעובדה $AB=0$ נקבל (לאחר הכפלה משמאל בהופכית) $B=0$ בסתירה.
$\Leftarrow$: נתון ש־ A לא הפיכה. לכן הצורה הקנונית של A שונה מ־I, ומכאן שיש שם שורת אפסים, ומהריבועיות יש משתנה חופשי. ולכן יש פתרון שונה מאפס למערכת ההומוגנית $Ax=0$. כלומר, יש $0\neq v\in\mathbb{F}^n$, כך ש־ $Av=0$. ניקח את

$$B=\begin{pmatrix} v & \cdots & v \end{pmatrix}$$

ואז לפי כפל עמודה נקבל:

$$\forall i : C_i(AB) = AC_i(B) = Av = 0$$

ולכן $AB = 0$, ומכאן A מחלקת אפס.

3. תהא A ריבועית הפיכה. תהא B מטריצה המתקבלת מהחלפת שורות 1-2 של A. כלומר, $B \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} A$. מה הקשר בין A^{-1} לבין B^{-1}?

פתרון: A הפיכה לכן יש מטרייצות אלמנטריות $E_1, \ldots, E_k$ כך ש- $E_k \cdots E_1 \cdot A = I$, ולכן $E_k \cdots E_1 = A^{-1}$. $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_0} \cdot B$, ולכן:

$$E_k \cdots E_1 \cdot \underbrace{E_0 B}_{A} = I$$

ולכן $B^{-1} = A^{-1} \cdot E_0$.