תרגול 8- שילוש

הגדרה. מטריצה A נקראת ניתנת לשילוש אם היא דומה למטריצה משולשית עליונה (תחתונה).

משפט. מטריצה ניתנת לשילוש אם ורק אם הפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לינארים.

הערה. המטריצה המשולשית אינה יחידה! יתכן שתי מטריצות משולשיות L_1, L_2 שונות כך ש-$A \sim L_1, A \sim L_2$

תרגיל. הוכח\הפרך: תהי A מטריצה ריבועית אז ל-Aול-A^tקיימים אותם ע"ע?

נכון,

$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left|(\lambda I - A)^t\right| = |\lambda I - A^t| = p_{A^t}(\lambda)$ כלומר ל-A, A^tיש אותו פולינום אופייני ולכן בפרט אותם ע"ע.

תרגיל. הוכח\הפרך: תהי Aמטריצה ריבועית אז ל-Aול-A^tקיימים אותם וע? (מבחינה של מתמטיקה)

לא נכון, ניקח $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, אז ל-$\lambda = 1$הוא ע"ע של A, A^t אבל המ"ע הם $Sp\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ של Aו-$Sp\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ של A^t

תרגיל. הוכח\הפרך: אם המטריצה A לכסינה אז A^2 לכסינה.

כן,

$$A^2 = AA = P^{-1}DPP^{-1}DP = P^{-1}D^2P$$

תרגיל. הוכח\הפרך: אם המטריצה A^2 לכסינה אז A לכסינה.(מבחינה של מתמטיקה)

לא, ניקח $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ואז $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$המטריצה A^2 אלכסונית ולכן בפרט לכסינה בעוד של-A אין ע"ע מעל $\mathbb{R}$ ולכן אינה לכסינה

תרגיל. הוכח\הפרך: אם מטריצה לכסינה אז הריבוי האלגבי של כל ע"ע שלה שווה ל-1?

לא, ניקח $A = I$ אז יש ערך עצמי יחיד השווה ל-1 וריבוי האלגברי שווה ל-n

תרגיל. הוכח\הפרך: אם המטריצות $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ניתנות ללכסון אז גם $A + B$ ניתנת ללכסון?

לא, שימו לב ש- $A = I$,$B = -I$ כדוגמא הניתנה בחלק מהתרגולים אינה טובה! הרי מטריצת ה-0 אלכסונית ובפרט לכסינה.

ניקח $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ו-$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ אז העע של A הם $-1, 3$ ולכן לכסינה, העע של B הם $0, -2$ ולכן לכסינה בעוד ש-$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ אינה לכסינה.

תרגיל. הוכח\הפרך: אם $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$ אז $m_A(\lambda) = m_B(\lambda)$

לא, ניקח $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ו- $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ לשניהם יש אותו פולינום אופייני אך הפולינום המינימלי שונה$m_A(\lambda) = \lambda - 1$ ו-$m_B(\lambda) = (\lambda - 1)^2$

תרגיל. הוכח\הפרך: אם $m_A(\lambda) = m_B(\lambda)$ אז A דומה ל-B? נראה לי ש-$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ו-$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ יש אותו פולינום מינימלי אבל אינן דומות.

הפולינום האופייני של A הוא $(\lambda-2)^2(\lambda-3)$ כדי למצוא את הפולינום המינימלי נציב את A ב-$(\lambda-3)(\lambda-2)$ ונקבל

$$(A-2I)(A-3I)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן $m_A(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-3)$

הפולינום האופייני של B הוא $(\lambda-3)^2(\lambda-2)$ כדי למצוא את הפולינום המינימלי נציב את B ב-$(\lambda-3)(\lambda-2)$ ונקבל

$$(B-2I)(B-3I)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן $m_A(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-3)$.

כלומר אלו שתי מטריצות בעלות אותו פולינום מינימלי, אבל אינן דומות כי יש להן פולינום אופייני שונה.

תרגיל. הוכח\הפרך: אם $m_A(\lambda) = m_B(\lambda)$ אז $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$? לא, המטריצות מהשאלה הקודמת יעבודו ש-$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ו-$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ יש אותו פולינום מינימלי אבל אינן דומות.

תרגיל. הוכח\הפרך: יהיו $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כך שלפחות אחת הפיכה האם $p_{AB}(\lambda)=p_{BA}(\lambda)$?

נכון $p_{AB}(\lambda)=|\lambda I-AB|=\left|\lambda AA^{-1}-ABAA^{-1}\right|=|A|\,|\lambda I-BA|\left|A^{-1}\right|=p_{BA}(\lambda)$