תרגיל 6 - פתרון

שאלה 1

יהי (Ω, Σ, μ) מ"מ סופי.

לכל שתי פונקציות f,g מדידות נגדיר $d(f,g) = \int_{\Omega} \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu$

1) הוכח ש-d הנ"ל הינה מטריקה על מרחב הפונקציות המדידות-Σ

תחת יחס השקילות: $f \sim g \iff f=g$ כמ"ת-μ.

פתרון 1)

נגדיר: $h(x) := \frac{x}{1+x}$. מתקיים: $h'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$

לכן, $h(x)$ מונוטונית עולה. נוכיח כי d מטריקה על $J(\Omega)$:

צ"ל: (א) $f \nsim g \Rightarrow d(f,g) \underset{\neq}{\geq} 0$

(ב) $d(f,g) = d(g,f)$

(ג) $d(f,g) \leq d(f,u) + d(g,u)$ $\quad (u \in J(\Omega))$

אכן:

(א) נניח $f \nsim g$. נסמן: $\forall n$ טבעי: $A_n := \{x \in \Omega \mid |f(x)-g(x)| \geq \frac{1}{n}\}$

ו: $A := \{x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x)\}$

לפי ההנחה: $\mu(A) \underset{\neq}{\geq} 0$.

וכן, מההגדרה של A, A_n נובע A_n סדרה עולה

ו- $\limsup A_n = \liminf A_n = A$

לכן, מרציפות המידה, קיים n_0 כך שאם $n \geq n_0$ מתקיים: $\mu(A_n) > 0$.

מסוים שלב $n_0 \le n$

$$d(f,g) = \int_\Omega \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\,d\mu \underset{A_n \subseteq \Omega}{\geq} \int_{A_n} \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\,d\mu \geq$$

מהגדרת A_n, והעובדה ש-h מונוטונית עולה, נסיק ע"י שימוש במונוטוניות האינט' ביחס לפונקציה.

$$\geq \int_{A_n} \frac{1/n}{1+1/n}\,d\mu = \frac{\mu(A_n)}{n+1} > 0$$

כנדרש.

(ב) הסימטריות של d נובעת מיידית מההגדרה.

(ג) לפי א"ש המשולש עבור הערך המוחלט:

$$|f-g| = |f-u+u-g| \leq |f-u|+|g-u|.$$

לכן - ממונוטוניות h והמונוטוניות האינט' מתקיים:

$$d(f,g) = \int_\Omega \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\,d\mu \leq \int_\Omega \frac{|f-u|+|g-u|}{1+|f-u|+|g-u|}\,d\mu$$

לינאריות האינטגרל.

$$= \int_\Omega \frac{|f-u|}{1+|f-u|+|g-u|}\,d\mu + \int_\Omega \frac{|g-u|}{1+|f-u|+|g-u|}\,d\mu \leq$$

מונוט' האינט'

$$\leq \int_\Omega \frac{|f-u|}{1+|f-u|}\,d\mu + \int_\Omega \frac{|g-u|}{1+|g-u|}\,d\mu$$

$$= d(f,u) + d(g,u)$$

כנדרש.

ב) הכיוון שמתקיים:

$$d(f_n,f)\to 0 \iff f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

סעיף 2)

כיוון ראשון:

נניח כי $f_n \xrightarrow{d} f$.

לכל $n,k\in\mathbb{N}$, נגדיר:

$$A_{nk} := \{x \mid |f_n(x)-f(x)| \geq 1/k\}$$

כמו בהוכחה של סעיף א נקבל:

$$\forall n,k: \quad d(f_n,f) \geq \frac{\mu(A_{nk})}{1+k}$$

אולם, לפי ההנחה אגף שמאל שואף ל-0 כש n שואף ל ∞.

ולכן $\forall k\in\mathbb{N}: \quad \mu(A_{nk}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

כלומר (מהגדרת הקבוצות A_{nk} (מהגדרת התכנסות במידה):

$$f_n \xrightarrow{\mu} f,$$

כיוון שני:

נניח $f_n \xrightarrow{\mu} f$, ויהי $\varepsilon>0$.

לפי אדטיביות האינטגרל ביחס לקבוצה:

$$(1)\quad d(f_n,f) := \int_\Omega \frac{|f-f_n|}{1+|f-f_n|}\,d\mu = \int_{A_{nk}} \frac{|f-f_n|}{1+|f-f_n|}\,d\mu + \int_{\Omega\setminus A_{nk}} \frac{|f-f_n|}{1+|f-f_n|}\,d\mu$$

(כאשר A_{nk} כמו בהוכחת הכיוון הראשון).

הערה: ממונוטוניות האינטגרל:

$$(2)\quad \int_{\Omega\setminus A_{nk}} \frac{|f-f_n|}{1+|f-f_n|}\,d\mu \leq \frac{1}{k}\,\mu(\Omega\setminus A_{nk}) \leq \frac{1}{k}\,\mu(\Omega)\ ,$$

ובנוסף ש- $\forall x:\ h(x)\leq 2$

מקבלים:

$$(3)\quad \int_{A_{nk}} \frac{|f-f_n|}{1+|f-f_n|}\,d\mu \leq 2\mu(A_{nk})$$

כיוון שהנחנו $f_n \xrightarrow{\mu} f$,
וכיוון שהמידה μ סופית על (Ω, S), קיימים k_0, n_0 טבעיים כך שלכל $n>n_0,\ k>k_0$:

$$\mu(A_{nk}) < \varepsilon/4$$

וגם $\frac{1}{k}\,\mu(\Omega) < \varepsilon/2$

ולכן, לפי (1), (2) ו-(3), לכל $n>n_0,\ k_0<k$ מתקיים:

$$d(f,f_n) \leq \frac{1}{k}\,\mu(\Omega) + 2\mu(A_{nk}) < \varepsilon\ .$$

מסקנה: $f_n \xrightarrow{d} f$ כנדרש.

שאלה 2

תהי f_n סדרת פונ' מדידות, אי שליליות מעל (X,A,μ) כך ש $f_n \searrow f$

וקיים N כך ש $f_N \in L(X)$.

הוכיחו כי $\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu$.

פתרון:

לכל $n \geq N$ נגדיר $0 \leq h_n := f_N - f_n \leq f_N$.

אזי h_n סדרה עולה של פונקציות אי שליליות:

ומתקיים: $\int_X h_n \, d\mu \leq \int_X f_N \, d\mu < \infty$ (מונוטוניות האינטגרל).

לכן ניתן להשתמש במשפט ההתכנסות המונוטונית עבור הסדרה $(h_n)_{n=N}^{\infty}$ ולהסיק:

$$\lim \int_X h_n \, d\mu = \int_X \lim h_n \, d\mu < \infty$$

אולם $\lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} (f_N - f_n) = f_N - f$

ולכן:

$$\lim \int_X f_N - f_n \, d\mu = \int_X f_N - f \, d\mu < \infty$$

$$\| $$

$$\int_X f_N \, d\mu - \lim \int_X f_n \, d\mu = \int_X f_N \, d\mu - \int_X f \, d\mu$$

מלינאריות האינטגרל (סופי, אינטגרבילים) והצבעה!

וכעת נחסר משני האגפים $\int_X f_N \, d\mu < \infty$, נקבל:

$$\int_X f_n \, d\mu \longrightarrow \int_X f \, d\mu$$

- כנדרש.

3. יהי (X,S,μ) ממ"ח סיגמא סופי. נניח ו f הינה אינטגרבילית ואי שלילית. הוכיחו כי אם $\varepsilon>0$ אזי קיימת $A\in S$ כך ש $\mu(A_\varepsilon)<\infty$ ומתקיים

$$\varepsilon+\int_{A_\varepsilon} f>\int f.$$

<u>פתרון:</u>

מכיון ש (X,S,μ) הינו ממ"ח סיגמא סופי, נובע כי קיימת סדרה של קבוצות $F_n\in S$ כך ש $\mu(F_n)<\infty$ וגם $X=\bigcup_n F_n$. ללא הגבלת הכלליות נניח כי F_n זרות.

נסמן $E_k=\bigcup_{n=1}^{k}F_n$ איחוד סופי של קבוצות, ונסמן $f_n=f1_{E_n}$ (הצמצום של f על E_n). מכיון ש $X=\bigcup_k E_k$ נובע כי $f_n\to f$, ומכיון ש f אי שלילית נובע כי $f_n\uparrow f$. כעת, מכיון ש f אינטגרבילית, נוכל להשתמש במשפט ההתכנסות המונוטונית של לבג להסיק ש $\int f=\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f=\lim_{n\to\infty}\int f1_{E_n}=\lim_{n\to\infty}\int f_n$. מכיון ש $f\geq f_n$ נובע כי $\int f\leq\int_{E_n} f$ ומכאן ש $\int_{E_n} f\uparrow\int f$. קל לראות כי $\mu(E_k)<\infty$ לכל k וכי מהגדרת הגבול נובע כי $\int f<\int_{E_{k_0}} f+\varepsilon$ עבור k_0 מספיק גדול. נגדיר $A_\varepsilon:=E_{k_0}$ ונקבל את הנדרש.

שאלה 4

יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב σ-סופי,

ותהי $f\geq 0$ מדידה-μ כך ש- $\int_X f\,d\mu=\infty$.

הראו שלכל $M>0$ קיימת פונקציה g, מדידה-μ כך ש-

$f\geq g\geq 0$ כמ"ע-μ, המקיימת:

(1) $\int_X g\,d\mu \geq M$.

(2) $\|g\|_\infty<\infty$.

(3) $\mu([g\neq 0])<\infty$.

פתרון: נתון כי המרחב הוא σ סופי ולכן ניתן להציג:

$X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, כאשר כל A_n בעלת מידה סופית,

ויהי $M>0$. נגדיר לכל $k\in\mathbb{N}$:

$$E_k:=\bigcup_{n=1}^{k} A_n$$

$$f_k:=\mathbb{1}_{E_k} f$$

מכיון ש $f\geq 0$, הסדרה f_k מונוטונית עולה ל-f, ולכן עפ"י משפט ההתכנסות המונוטונית

$$\lim_{k\to\infty}\int_X f_k\,d\mu=\int_X f\,d\mu \underset{\text{נתון.}}{\overset{\uparrow}{=}} \infty$$

מכאן שקיים k_0 גדול דיו כך ש- $\int_X f_{k_0}\,d\mu > M+1$.

כעת נגדיר סדרה:

$$g_j := \mathbb{1}_{[f<j]} f_{k_0} \qquad j\in\mathbb{N}$$

אזי $0\leq g_j$ מונוטונית עולה ל f_{k_0} ולכן ממשפט ההתכנסות המונוטונית נקבל כי:

$$\lim_{j\to\infty}\int_X g_j\,d\mu = \int_X f_{k_0}\,d\mu \underset{\text{עפ"י בחירת } k_0}{\overset{\uparrow}{>}} M+1$$

מכיון שקיים j_0 גדול דיו כך ש- $\int_X g_{j_0}\,d\mu > M$.

כעת נגדיר:

$$g := g_{j_0} = \mathbb{1}_{E_{k_0}} \mathbb{1}_{[f<j_0]} f$$

אזי g מקיים את שלושת התנאים, שכן לפי הבנייה של g:

(1) $\int_X g\,d\mu > M$.

(2) $0 \le g < j_0$.

(3) $\mu([g \neq 0]) \le \mu(E_{k_0}) < \infty$.

5. תהי $g(x)$ פונקציה המקיימת $g(x)=g(x+1)$ לכל $x\in\mathbb{R}$ ובנוסף מתקיים כי $\int_{[0,1]} gdm$ הוא סופי.

נגדיר

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(nx)}{n^2}$$

הראו ש f סופית כמעט בכל מקום.

<u>פתרון:</u>

מכיון ש$g(x)$ מחזורית 1, לפי הגדרת $f(x)$ גם היא מחזורית 1, כלומר $f(x+1)=f(x)$.

מכאן שמספיק להראות כי f סופית כב"מ על הקטע $[0,1]$.

הוכחנו בתרגול כי פונקציה אינטגרבילית היא סופית כב"מ.

בנוסף, מהגדרת האינטגרל, אם $\int_{[0,1]} gdm$ סופי אזי g אינטגרבילית בקטע.

נסמן: $c:=\int_{[0,1]}|g|\,dm<\infty$.

נשים לב כי

$$\int_{[0,1]}|f|dm\le\int_{[0,1]}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|g(nx)|}{n^2}dm(x)\overset{\substack{monotone\\convergence}}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[0,1]}\frac{|g(nx)|}{n^2}dm(x)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[0,n]}\frac{|g(x)|}{n^3}dm(x)\overset{periodicity}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_{[0,1]}|g|dm=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c}{n^2}<\infty$$

מכאן נובע כי f אינטגרבילית ב $[0,1]$ ולכן סופית כב"מ שם. מכאן, לפי המחזוריות של f נקבל שהיא סופית כב"מ.