תרגיל 3

1. יהיו R_1, R_2 חוגים. למה איזומורפי $R_1 \times R_2/(\{0\} \times R_2)$? הוכיחו.
פתרון:

נוכיח ש$R_1 \times R_2/(\{0\} \times R_2) \cong R_1$. ובכן נגדיר את האפימורפיזם הבא: $\varphi : R_1 \times R_2 \to R_1$ ע"י $\varphi(a,b) = a$. קל לראות שזהו אכן אפימורפיזם. הגרעין זה כל האיברים שהולכים ל0. כלומר, כל הזוגות (a,b) שעבורם $a = 0$. וזה שווה בדיוק ל$\{0\} \times R_2$. לכן ממשפט האיזומורפיזן הראשון, $R_1 \times R_2/\{0\} \times R_2 \cong R_1$.

2. תנו דוגמא לחוג לא קומוטטיבי R ואידיאל $I \trianglelefteq R$ כך ש R/I קומוטטיבי.
פתרון:

בהתאם לשאלה הקודמת, נקח $R_1 = \mathbb{Z}, R_2 = M_2(\mathbb{Z})$ ונגדיר $R = R_1 \times R_2$ ו$I = \{0\} \times R_2$. אז R לא קומוטטיבי, אבל $R/I \cong R_1 = \mathbb{Z}$, כן קומוטטיבי.

3. יהיו R_1, R_2חוגים, ו$I_1 \trianglelefteq R_1, I_2 \trianglelefteq R_2$ אידיאלים. כזכור $I_1 \times I_2 \trianglelefteq R_1 \times R_2$. הוכיחו ש$R_1 \times R_2/I_1 \times I_2 \cong (R_1/I_1) \times (R_2/I_2)$.
פתרון:

נגדיר אפימורפיזם: $\varphi : R_1 \times R_2 \to (R_1/I_1) \times (R_2/I_2)$ ע"י $\varphi(a,b) = (a + I_1, b + I_2)$. קל לראות שזה אכן אפימורפיזם. הגרעים הוא כל הזוגות (a,b) כך ש$(a + I_1, b + I_2) = (0 + I_1, b + I_2)$. אבל זה אומר ש$a \in I_1, b \in I_2$, כלומר $(a,b) \in I_1 \times I_2$.

4. מצאו n כך ש$\mathbb{Z}[i]/\langle 3+i \rangle \cong \mathbb{Z}_n$. הוכיחו את האיזומורפיזם.
פתרון:

נבחר $n = 10$. נבנה הומומורפיזם באופן הבא:

1 חייב ללכת ל1, ולכן 3הולך ל3.

אנחנו רוצים ש$i + 3$ ילך ל0(מודולו 10), ולכן i חייב להישלח ל7.

לכן נגדיר: $\varphi(a + bi) = (a + 7b) \mod 10$. קל לראות ש1 הולך ל1, ושההעתקה על ושומרת חיבור. נוכיח שהיא שומרת כפל.

$\varphi((a+bi)(c+di)) = \varphi(ac - bd + i(ad+bc)) = ac - bd + 7(ad + bc) \mod 10$

$\varphi(a + bi)\varphi(c + di) = (a + 7b) \mod 10(c + 7d) \mod 10 = (a + 7b)(c + 7d) \mod 10 = (ac + 7(ad + bc) + 49bd \mod 10 = ac - bd + 7(ad + 4c) \mod 10$.

כעת נחשב את הגרעין. ברור ש$\varphi(3 + i) = 0$ ולכן $\langle 3 + i \rangle \subseteq \ker \varphi$.

מצד שני, יהיה $a + bi \in \ker \varphi$. אזי $a + 7b \equiv 0 \mod 10$. כלומר, $a = 10k + 3b$ עבור $k \in \mathbb{Z}$ כלשהו. נקבל ש $a+bi = 3b+bi+10k = b(3+i)+k(3-i)(3+i) \in \langle 3+i \rangle$. מש"ל.

5. יהי R חוג. נגדיר את המאפיין של R, מסומן ב$\text{char}(R)$, להיות n אם $1 + ... + 1$ n פעמים שווה ל0, ולכן $n > m \in \mathbb{N}$, $1 + ... + 1$ m פעמים לא שווה ל0. אם אין n כזה, נגדיר את המאפיין של R להיות 0. אם המאפיין של R שונה מ0, נגיד שלחוג יש מאפיין סופי. יהי R חוג עם מאפיין סופי, ו$I \trianglelefteq R$.

(א) הוכיחו ש$\text{char}(R/I) \leq \text{char}(R)$.
פתרון:
נניח $char(R) = n$. אז $(1 + I) + ... + (1 + I) = (1 + ... + 1) + I = 0 + I$ כאשר מחברים n פעמים. לכן $char(R/I) \leq char(R)$.

(ב) הוכיחו שלמעשה, $\text{char}(R/I)|\text{char}(R)$.
פתרון:
נסמן $char(R) = n, char(R/I) = m$ כאשר $m \leq n$. מחילוק עם שארית, יש k, r כך ש$n = km + r$ ו$r < m$. ובכן, ראינו שאם נחבר $1 + I$ n פעמים נקבל $0 + I$ בחוג המנה. כמו כן, אם נחבר $1 + I$ km פעמים, נקבל k כפול $(1 + I) + ... (1 + I)$ שמחברים m פעמים, כלומר $k \cdot (1 + I + ... + 1 + I) = k \cdot (0 + I) = (0 + I) + ... + (0 + I)$ kפעמים, שזה $0 + I$. לכן גם אם נחבר $1 + I$ r פעמים נקבל $(0 + I) - (0 + I) = (0 + I)$, בסתירה למינימליות של m. לכן $r = 0$. כלומר $m|n$.

6. יהי R חוג נסמן ב$R[x]$ את חוג הפולינומים מעל R, כלומר אוסף הביטויים מהצורה $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ עבור n טבעי כלשהו, עם חיבור וכפל טבעיים (שימו לב שx הוא איבר במרכז). הוכיחו ש

$$R[x]/\langle x \rangle \cong R$$

פתרון: נגדיר $f(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) = a_0$ הרכיב החופשי. קל לראות שזה הומומורפיזם. על: לכל איבר r ניקח את הפולינום הקבוע r להיות מקור. נחשב את הגרעין:

$$0 = f(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) = a_0 \iff \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i = x \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} x^i$$

$$\iff x \mid \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \iff \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \langle x \rangle$$

7. יהי R חוג קומוטטבי ו$I \trianglelefteq R$ הוכיחו שהרדיקל של R/I (אוסף האיברים הנילפוטנטים) שווה ל$\sqrt{I}/I = \{x + I : x \in \sqrt{I}\}$ כאשר $\sqrt{I}$ מסמן את הרדיקל של I.
פתרון: $(x + I)$ שייך לרדיקל של R/I אמ"ם קיים n טבעי כך ש: $(x + I)^n = 0 + I$.

$$(x + I)^n = 0 \iff x^n + I = 0 \iff x^n \in I \iff x \in \sqrt{I}$$