העשרה באלגברה לינארית 2: איך מוצאים שורשים לפולינום?

בועז צבאן

8 בנובמבר 2010

נתון פולינום $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ ומעוניינים למצוא את שורשיו. למעשה, הבעיה היא למצוא שורש אחד α של $f(x)$, כיון שאז $f(x) = (x-\alpha)g(x)$ ואז אפשר להמשיך עם $g(x)$ באותו אופן, למציאת כל שרשי $f(x)$.

1 שיטת הניחוש

בשיטה זו, מציבים כמה ערכים ידידותיים (בדרך כלל $0, 1, -1, 2, -2, \dots$), ורואים האם הפולינום מתאפס באחד מהם.

כמה שזה נשמע טיפשי, זה עובד עבור כמעט כל הפולינומים שתיתקלו בהם בתרגילים. זה לא במקרה - ממציא התרגיל רוצה להקל עליכם.

דוגמא. $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$ מעל $\mathbb{R}$. רואים מייד ש 0 מאפס, או במלים אחרות, שאפשר להוציא x, לקבל $f(x) = x(x^3 + 2x^2 - x - 2)$.

נותר איפוא למצוא את שורשי $g(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$. נציב $x = 1$: $g(1) = 1 + 2 - 1 - 2 = 0$, לכן אפשר להוציא את הגורם $(x-1)$: $g(x) = (x-1)(x^2 + 3x + 2)$, ואת שורשי הפולינום האחרון מוצאים לפי הנוסחה המפורסמת לשורשי פולינומים ממעלה 2.

לסיכום: $f(x) = x(x-1)(x+1)(x+2)$ ושרשיו הם $0, 1, -1, -2$.

אם מדובר בשדה קטן, אפשר לבדוק את כל השורשים האפשריים אחד אחד, ומתקבלת שיטה שעובדת בוודאות.

דוגמא. $f(x) = x^3 + 3x + 4$ מעל $\mathbb{Z}_5$. הצבת $0, 1, 2$ מראה שאינם שורשים. הצבת 3 נותנת $f(3) = 3^3 + 4 + 4 = -3 + 3 = 0$. לכן $f(x) = (x-3)(x^2 + 3x + 2)$. הצבת $0, 1, 2$ ב $x^2 + 3x + 2$ לא נותנת 0, אבל הצבת 3 כן. לכן $f(x) = (x-3)(x-3)(x-4)$.

2 ניחוש מושכל

שיטה זו היא עבור פולינומים מעל $\mathbb{Q}$. יהי $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. אנו מחפשים שורש רציונלי (אם יש).

אפשר, על ידי כפל במכנה משותף של $a_0, \dots, a_n$, להניח שכל המקדמים שלמים (ואכן נניח זאת).

אם $a_0 = 0$ אז 0 שורש של הפולינום וסיימנו. אחרת, נחפש שורש רציונלי שונה מאפס, כלומר מהצורה $\frac{k}{m}$, כאשר k שלם, m טבעי, ו k, m זרים זה לזה (אפשר להניח זאת על ידי צמצום השבר). חייב להתקיים:

$$0 = f\left(\frac{k}{m}\right) = a_0 + a_1\frac{k}{m} + \cdots + a_n\left(\frac{k}{m}\right)^n = a_0 + a_1\frac{k}{m} + \cdots + a_n\frac{k^n}{m^n}$$

נכפול את שני האגפים ב m^n, ונקבל

$$0 = a_0m^n + a_1km^{n-1} + \cdots + a_nk^n$$

כלומר

$$a_0m^n = k(a_1m^{n-1} + \cdots + a_nk^{n-1})$$

לכן, k מחלק את a_0m^n. כיון ש k זר ל m, בהכרח k מחלק את a_0 (כדי לראות זאת, חשוב על k כמכפלה של חזקות של ראשוניים).

באופן דומה (על ידי חילוץ a_nk^n) נקבל ש m מחלק את a_n.

לסיכום: מספיק לבדוק רק את השברים $\frac{k}{m}$ כאשר:

1. k,m זרים.
2. k מחלק את a_0.
3. m מחלק את a_n.

דוגמא. $x^4+6x^3-104x^2-294x+2695$.

דרוש ש m מחלק את $a_4=1$, לכן $m=1$. דרוש ש k מחלק את $a_0=2695$, והאפשרויות הן $\pm1,\pm5,\pm7,\pm11,\pm35,\dots$ נבדוק את האפשרויות הקטנות (בערך מוחלט), ונראה ש $x=5$ הוא פתרון. נחלץ את $(x-5)$ מהפולינום, ונישאר עם $x^3+11x^2-49x-539$.

כאן, $m=1$ ו k צריך לחלק את 539. האפשרויות עבור k: $\pm1,\pm7,\pm11,\pm49,\pm77,\pm539$. בדיקת האפשרויות הקטנות תראה ש 7 פתרון, ומה שיישאר זה פולינום ממעלה 2, שאפשר לפתור עם הנוסחה.

3 שיטת ניוטון־רפסון

שיטה זו היא עבור פולינומים (וגם לפונקציות רבות אחרות) מעל $\mathbb{R}$. קרא על השיטה בויקיפדיה.

נבחר נקודת התחלה x_0, ונגדיר באינדוקציה

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

אם התמזל מזלנו, הסדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ תתכנס מהר, לשורש של $f(x)$. אם לא, ניקח נקודת התחלה אחרת וננסה שוב.

במחשבונים רבים, יש דרך לנסח את נוסחת הנסיגה בצורה שכל לחיצה על המקש "=" תקדם את הסדרה צעד נוסף, כך שאפשר לראות את הסדרה מתכנסת מול העיניים.

תרגיל. השתמש בשיטת ניוטון־רפסון למצוא שורש לאחד הפולינומים הממשיים מהדוגמאות לעיל.