תרגיל תיאורטי מספר 4

1. סטודנט סקרן החליט לבדוק מה עומד מאחורי הצלחתו במבחני התואר. הוא החליט שהפרמטרים הקובעים הם: P_1 מספר השעות שהקדיש ללימוד למבחן, P_2 מספר שיעורי הבית שפתר ו P_3 מספר הספרים שהוא קרא בנושא. הוא אסף את הנתונים הבאים מ 4 קורסים שונים

	P_1	P_2	P_3	Final Grade
1	4	2	3	7
2	2	3	3	4
3	4	4	5	8
4	2	5	5	6

השאלה שעמדה בפני הסטודנט היא מה המשקל שתרם כל פרטמר לציון המבחן. הוא החליט לסמן ב x_i את המשקל שתורם פרמטר P_i לציון הסופי וניסה למצוא אותם ע"י פתירת המשוואות

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 6 \end{aligned}$$

אך לצערו, לא נמצא פתרון... הסטודנט לא אמר נואש והחליט להשתמש בידע שרכש בקורס אלגברה לינארית... הוא החליט למצוא c_1, c_2, c_3 כך שוקטור התוצאה $b' = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \end{pmatrix}$ שמחושב ע"י

$$\begin{aligned} 4c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= b'_1 \\ 2c_1 + 3c_2 + 3c_3 &= b'_2 \\ 4c_1 + 4c_2 + 5c_3 &= b'_3 \\ 2c_1 + 5c_2 + 5c_3 &= b'_4 \end{aligned}$$

יהיה הכי קרוב לוקטור התוצאה האמיתי $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$. כוונתו ב"קרוב" הוא למזער את $\|b - b'\|$ (כאשר $\| * \|$ היא הנורמה המשורית מהמכפלה הסקלארית המוגדרת על $\mathbb{R}^4$). מצאו גם אתם את c_1, c_2, c_3.

[הדרכה: יצגו את הבעיה כמערכת משוואות $Ax = b$ וחשבו איך הבעיה של הסטודנט שקולה למיצאת הטלה של b על איזה שהוא תת מרחב (שהוא יהיה b')... לאחר מכן פתרו את המשוואה $Ax = b'$. אזהרה: תרגיל עם חישובים לפניך]

פתרון: נגדיר

$$A=\begin{pmatrix}4&2&3\\2&3&3\\4&4&5\\2&5&5\end{pmatrix}$$

ונרצה לפתור את המערכת $Ax=b$ עבור $b=\begin{pmatrix}7\\4\\8\\6\end{pmatrix}$. נדרג.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4&2&3&7\\2&3&3&4\\4&4&5&8\\2&5&5&6\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}4&2&3&7\\0&2&1.5&0.5\\0&2&2&1\\0&4&3.5&2.5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}4&2&3&7\\0&2&1.5&0.5\\0&0&0.5&0.5\\0&0&0.5&1.5\end{array}\right)$$

רואים כי אכן אין פתרון למערכת ועמודות A בת"ל. נשים לב כי $C(A)=\left\{Ax : x\in\mathbb{R}^4\right\}$ והשאלה מבקשת למצוא $b'\in C(A)$ כך ש $\|b-b'\|=\min\left\{\|b-b"\| : b"\in C(A)\right\}$ שזה בדיוק התכונה של ההטלה $\pi_{C(A)}(b)$ ולכן לאחר שנמצא את b' נפתור את המערכת $Ax=b'$ והפתרון שלה יהיה $c=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$ המבוקש.

נמצא בסיס או"ג ל $C(A)$ ע"י גרם שמידט

נסמן $v_1=\begin{pmatrix}4\\2\\4\\2\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}3\\3\\5\\5\end{pmatrix}$ ונפעיל גרם שמידט.

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1\\
w_2 &= v_2-\frac{\langle v_2,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}-\frac{40}{40}\begin{pmatrix}4\\2\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix}\\
w_3 &= v_3-\frac{\langle v_3,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1-\frac{\langle v_3,w_2\rangle}{\|w_2\|^2}w_2=\begin{pmatrix}3\\3\\5\\5\end{pmatrix}-\frac{48}{40}\begin{pmatrix}4\\2\\4\\2\end{pmatrix}-\frac{12}{14}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}3\\3\\5\\5\end{pmatrix}-\frac{6}{5}\begin{pmatrix}4\\2\\4\\2\end{pmatrix}-\frac{6}{7}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3/35\\-9/35\\1/5\\1/35\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

כלומר $\left\{w_1=\begin{pmatrix}4\\2\\4\\2\end{pmatrix}, w_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix}, w_3=\begin{pmatrix}-3/35\\-9/35\\1/5\\1/35\end{pmatrix}\right\}$ בסיס אורתוגנלי ל $C(A)$.

כעת נטיל את $b=\begin{pmatrix}7\\4\\8\\6\end{pmatrix}$ על $C(A)$ באמצעות הבסיס הזה שהוא או"ג. לפי התיאוריה

$$b'=\pi_{C(A)}(b)=\sum_{i=1}^{3}\pi_{w_i}(b)=\sum_{i=1}^{3}\frac{\langle b,w_i\rangle}{\|w_i\|^2}w_i$$

נחשב

$$\frac{\langle b,w_1\rangle}{||w_1||^2}w_1=\frac{80}{40}\begin{pmatrix}4\\2\\4\\2\end{pmatrix},\ \frac{\langle b,w_2\rangle}{||w_2||^2}w_2=\frac{8}{14}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix},\ \frac{\langle b,w_3\rangle}{||w_3||^2}w_3=\frac{1/7}{4/35}\begin{pmatrix}-3/35\\-9/35\\1/5\\1/35\end{pmatrix}$$

ונקבל בסופו של דבר

$$b^{'}=2\begin{pmatrix}4\\2\\4\\2\end{pmatrix}+\frac{4}{7}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix}+\frac{1}{28}\begin{pmatrix}-3\\-9\\7/5\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}27\\17\\33\\23\end{pmatrix}$$

נפתור את המערכת $Ax=b'$ ונקבל שהפתרון הוא

$$c=\begin{pmatrix}1\\-1/2\\5/4\end{pmatrix}$$

2. יהא $(V,\langle *,*\rangle)$ ממ"פ. נגדיר $S=\{u\in V:\ \|u\|=1\}$ (כאשר $\|u\|$ זה הנורמה המושרית). יהא $0\neq v\in V$. הוכיחו כי $\min\{\|v-u\|:\ u\in S\}$ מתקבל עבור הנרמול של v (כלומר עבור $\tilde{u}=\frac{v}{\|v\|}$).
פתרון : מחישוב ישיר נקבל

$$\|v-\frac{v}{\|v\|}\|^2=\|v\left(1-\frac{1}{\|v\|}\right)\|^2=\left|\left(1-\frac{1}{\|v\|}\right)\right|^2\|v\|^2=|(\|v\|-1)|^2=(\|v\|-1)^2=\left(\|v\|^2-2\|v\|+1\right)$$

ולכל $u\in S$ מתקיים כי כי

$$\|v-u\|^2=\langle v-u,v-u\rangle=\|v\|^2+-\langle v,u\rangle-\langle u,v\rangle+\|u\|^2=\|v\|^2+-2Re(\langle v,u\rangle)+1$$

ולכן בשביל להשלים את הטענה מספיק להראות כי $\|v\|^2-2\|v\|+1\leq\|v\|^2+-2Re(\langle v,u\rangle)+1$ או באופן שקול להראות כי $2Re(\langle v,u\rangle)\leq 2\|v\|$. אכן, מתקיים כי $Re(\langle v,u\rangle)\leq|\langle v,u\rangle|$ ולכן לפי אי שיוויון קושי שוורץ נקבל כי

$$Re(\langle v,u\rangle)\leq|\langle v,u\rangle|\leq\|v\|\|u\|=\|v\|$$

כנדרש.

3. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ויהיו v ו"ע המשויך ל λ ע"ע (כלומר $Av=\lambda v$) .

(א) הוכיחו כי לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים כי v ו"ע של A^k המתאים לע"ע λ^k.
פתרון : נוכיח באינדוקציה על k כי v הוא ו"ע של A^k המתאים לע"ע λ^k. עבור $k = 1$ מתקיים לפי נתון כי $A^1v = \lambda^1v$. כעת עבור k כעת נניח נכונות הטענה עבור k מסוים ונוכיח עבור $k+1$. אכן

$$A^{k+1}v = A\left(A^k v\right) = A\lambda^k v = \lambda^k Av = \lambda^k \lambda v = \lambda^{k+1} v$$

כאשר משתמשים בהנחת האינדוקציה ש $A^k v = \lambda^k v$.

(ב) הוכיחו כי לכל פולינום $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ מתקיים כי v ו"ע של $p(A)$ המתאים לע"ע $p(\lambda)$.
פתרון : יהא $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ פולינום. נשים לב כי $A^0v = Iv = v = \lambda^0 v$ ובצירוף הסעיף הקודם נוכל לחשב

$$p(A)v = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i A^i\right) v = \sum_{i=0}^{n} a_i A^i v = \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i v = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i\right) v = p(\lambda)v$$

ולכן vו"ע של $p(A)$ המתאים לע"ע $p(\lambda)$.

4. תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ לכסינה. הוכיחו כי $A^2 + 3I$ לכסינה והפיכה.
פתרון : לפי נתון קיימים $v_1, \ldots, v_n$ ו"ע בת"ל המתאימים ל $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (לא בהכרח שונים). לפי תרגיל קודם $v_1, \ldots, v_n$ ו"ע של $p(A) = A^2 + 3I$ (עבור $p(x) = x^2 + 3$) המתאימים לע"ע $p(\lambda_1), \ldots, p(\lambda_n)$. בפרט ל $A^2 + 3I$ יש n ו"ע בת"ל ולכן היא לכסינה. בנוסף כיוון ש $p(\lambda_i) \neq 0$ (כי לכל מספר ממשי a מתקיים $p(a) = a^2 + 3 > 0$) נקבל של $A^2 + 3I$ אין ע"ע שווה אפס (שימו לב כי ש $p(\lambda_1), \ldots, p(\lambda_n)$ אלו כל הע"ע של $A^2 + 3I$ כי אם היה ע"ע נוסף אז היה לו ו"ע והוא היה בת"ל ביחד עם $v_1, \ldots, v_n$ שמוביל לסתירה) ולכן היא הפיכה.

5. יהיו $a_0, a_1 \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ מספרים מרוכבים. נגדיר מטריצת ונדרמונט להיות

$$V(a_0, \ldots a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ & & & & \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

למשל

$$V(3,2,4) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 4 & 4^2 \end{pmatrix}$$

(א) הוכיחו כי

$$|V(a_0, \ldots a_{n-1})| = \prod_{0 \le i < j \le n-1} (a_j - a_i)$$

למשל

$$|V(3,2,4)| = (4-2)(4-3)(2-3)$$

הדרכה: בצעו את פעולות העמודה האלמנטריות הבאות לפי הסדר הבא

- $C_n - a_0C_{n-1} \to C_n$
- $C_{n-1} - a_0C_{n-2} \to C_{n-1}$
- עד $C_2 - a_0C_1 \to C_2$
- השתמשו ברקורסיה/אינדוקציה על מנת להגיע לפתרון.

כאשר C_i זה עמודה i של המטריצה (שימו לב שפעולות אלו לא משנות את הדטרמיננטה)
פתרון: אחרי ביצוע פעולות עמודה אלו נקבל כי

$$\begin{pmatrix} 1 & a_0-a_0 & a_0^2-a_0^2 & \cdots & a_0^{n-1}-a_0^{n-1} \\ 1 & a_1-a_0 & a_1^2-a_0a_1 & \cdots & a_1^{n-1}-a_0a_1^{n-2} \\ \vdots & & & & \\ 1 & a_{n-1}-a_0 & a_{n-1}^2-a_0a_{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1}-a_0a_{n-1}^{n-2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_1-a_0 & a_1(a_1-a_0) & \cdots & a_1^{n-2}(a_1-a_0) \\ \vdots & & & & \\ 1 & a_{n-1}-a_0 & a_{n-1}(a_{n-1}-a_0) & \cdots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1}-a_0) \end{pmatrix}$$

והדטר' של שתי המטריצות שוות. נפתח לפי שורה ראשונה ונקבל כי הדטר' שווה ל

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_1-a_0 & a_1(a_1-a_0) & \cdots & a_1^{n-2}(a_1-a_0) \\ \vdots & & & & \\ 1 & a_{n-1}-a_0 & a_{n-1}(a_{n-1}-a_0) & \cdots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1}-a_0) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1-a_0 & a_1(a_1-a_0) & \cdots & a_1^{n-2}(a_1-a_0) \\ & & & \\ a_{n-1}-a_0 & a_{n-1}(a_{n-1}-a_0) & \cdots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1}-a_0) \end{pmatrix}$$

נוציא גורם משותף $(a_1 - a_0)$ מהשורה הראשונה , גורם משותף $(a_2 - a_0)$ מהשורה השניה וכו' עד שנוציא גורם משותף $(a_{n-1} - a_0)$מהשורה האחרונה. נמשיך ונקבל

$$= \prod_{i=1}^{n-1} (a_i - a_0) \left| \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-2} \\ \vdots & & & \\ 1 & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{pmatrix} \right| = \prod_{i=1}^{n-1} (a_i - a_0) \left| V(a_1, \ldots a_{n-1}) \right|$$

לפי הנחת האינדוקציה נמשיך לקבל

$$= \prod_{i=1}^{n-1} (a_i - a_0) \cdot \prod_{1\le i<j\le n-1} (a_j - a_i) = \prod_{0\le i<j\le n-1} (a_j - a_i)$$

כנדרש

(ב) הוכיחו כי $a_0, a_1 \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ מספרים שונים אמ"מ המטריצה $V(a_0, \ldots a_{n-1})$ הפיכה.
פתרון : לפי משפט $V(a_0, \ldots a_{n-1})$ הפיכה אמ"מ $|V(a_0, \ldots a_{n-1})| \ne 0$ שזה לפי החישוב אמ"מ $\prod_{0\le i<j\le n-1} (a_j - a_i) \ne 0$ אמ"מ $a_0, a_1 \ldots, a_{n-1}$ מספרים שונים.

6. תהא $A \in \mathbb{R}^{9\times 9}$ עם דרגה = 5. נתון כי $rank(A - 3I) = 5$. עוד נתון כי ל A קיים ע"ע ששוה ל - 5 . הוכיחו כי A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ ומצא את האלכסונית ש A דומה לה.
פתרון : ידוע כי $rank(A) + \dim N(A) = 9$ ולכן $\dim N(A) = 4$. כלומר הר"ג של ע"ע = 0 הוא 4 ולכן הר"א שלו לפחות 4. משיקולים דומים הר"ג של ע"ע = 3 הוא 4 ולכן הר"א שלו לפחות 4. נתון שיש ע"ע =5 ולכן הר"א שלו לפחות 1.

כיוון שסכום ר"א של הע"ע הוא 9 אזי נקבל כי

ע"ע =0 הוא עם בדיוק ר"א (ששוה לר"ג) 4

ע"ע =3 הוא עם בדיוק ר"א (ששוה לר"ג) 4

ע"ע =5 הוא עם בדיוק ר"א (ששוה לר"ג) 1

לפי משפט A לכסינה והמטריצה האלכסונית הדומה לה היא

$$D = \begin{pmatrix} 0I_4 & & \\ & 3I_3 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$

כאשר I_4 היא מטריצת היחידה מגודל 4×4.

.7

(א) תהא $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ כך שכל שורה של A מסתכמת לאותו מספר שנסמנו λ. הוכיחו כי λ ע"ע של A.

למשל למטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 8 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ יש ערך עצמי 6 כי כל שורה מסתכמת ל 6.

רמז: חישבו מי הו"ע המתאים.

פתרון : נגדיר $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ונחשב Av: לכל $1 \le i \le n$ מתקיים כי

$$(Av)_i = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} v_k = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} \overset{(1)}{=} \lambda$$

כאשר (1) נובע מכך ש $\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}$ זה סכום האיברים של שורה i שלפי נתון שווה λ. ומכאן ש

$$Av = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ב) תהא $\mathbb{R}^{3\times 3} \ni A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. לכסנו או"ג את A. כלומר מצאו מטריצה P או"ג ומטריצה אלכסונית D כך ש $P^{-1}AP = D$

פתרון : לפי סעיף קודם $\lambda = 3$ הוא ע"ע של A בנוסף רואים כי A אינה הפיכה ולכן יש לה ע"ע 0 (בדרך אחרת: $rank(A) = 1$ ולכן $V_{\lambda=0} = \dim N(A) = 3 - rank(A) = 2$ ע"ע 0 הוא מר"ג 2).

נחשב מרחבים עצמיים $V_{\lambda=0} = N(A)$ נדרג את A ונמצא בסיס:

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{\lambda=0} = \left\{ \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} ; s,t \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

נפעיל גרם שמידט על הבסיס ונקבל

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 \\ w_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

בסיס או"ג ננרמל אותו ונקבל

$$\left\{ u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{1.5}}\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס או"נ ל $V_{\lambda=0}$. כיוון ול 0 יש 2 ו"ע ול 3 יש ו"ע אחד נוסף לפחות נקבל שיש 3 ו"ע וזה יספיקו לנו להמשך.
נחשב $V_{\lambda=3} = N(A-3I)$. נדרג את $A-3I$ ונמצא בסיס:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{\lambda=3} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} ; s, t \in \mathbb{R} \right\} = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ובסיס או"נ הוא

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נגדיר

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{0.5}{\sqrt{1.5}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{0.5}{\sqrt{1.5}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{1.5}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

מטריצה או"ג (כי עמודותיה וקטורים או"נ) שעמדותיה הם ו"ע של A ולכן

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

8. נגדיר סדרת מספרים בצורה רקורסיבית:

$$\begin{aligned} a_{-1} &= -1 \\ a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ \forall n \geq 2 \ a_n &= -2a_{n-1} + a_{n-2} + 2a_{n-3} \end{aligned}$$

(א) הגדירו A המקיימת $\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}$ לכל $n \geq 2$.

פתרון : לפי הגדרה

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

תקיים את השיוון הדרוש.

(ב) לכסנו את A כדי למצוא ביטוי מפורש ל a_n (עבור $n \geq 2$). הדרכה: שימו לב כי $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \\ a_{-1} \end{pmatrix}$ לכל $n \geq 2$.

פתרון : נמצא פולינום אופיני

$$p_A(x) = \left| \begin{pmatrix} x+2 & -1 & -2 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} x-1 & -1 & -2 \\ x-1 & x & 0 \\ x-1 & -1 & x \end{pmatrix} \right| = (x-1) \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & x & 0 \\ 1 & -1 & x \end{pmatrix} \right| =$$

$$= (x-1) \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 0 & x-2 \end{pmatrix} \right| = (x-1)(x+1)(x+2)$$

ולכן $\{-1, 1, -2\}$ הם הע"ע של A. ו"ע:

עבור $\lambda = -1$

$$A + I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

עבור $\lambda = 1$

$$A - I = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

עבור $\lambda = -2$

$$A+2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} 4t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ולכן אם נגדיר $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ נקבל כי $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ולכן $A = PDP^{-1}$
ולכן $A^n = PD^nP^{-1}$ לכל n טבעי ולכן

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \\ a_{-1} \end{pmatrix} = PD^{n-1}P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{n-1} \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -9(-1)^{n-1} \\ 4(-2)^{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 - 9(-1)^{n-1} + 16(-2)^{n-1} \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

ולכן

$$a_n = \frac{1}{6}\left(-1 - 9(-1)^{n-1} + 16(-2)^{n-1}\right) = \frac{1}{6}\left(-1 + 9(-1)^n + (-2)^{n+3}\right)$$

לכל $n \geq 2$.