אינפי 2 – פיתרון תרגיל 2

1. ראשית נרשום : $\max(x,x^2)=\begin{cases} x^2 & ,x<0 \text{ או } x>1 \\ x & ,\ 0\le x\le 1\end{cases}$, ואם נסתכל על הפונקציה

$f(x)=\begin{cases} \frac{x^3}{3}+c_1 & ,x<0 \\ \frac{x^3}{3}+c_2 & ,x>1 \\ \frac{x^2}{2}+c_3 & ,0\le x\le 1\end{cases}$, אז היא מהווה קדומה לפונקציה המקורית שלנו

עבור $x\neq 1, x\neq 0$! . כעת נבדוק תנאי על הקבועים כך ש – f תהיה קדומה לפונקציה המקורית על כל הישר . אם נדרוש רציפות נקבל כי :

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)\Longrightarrow \frac{1}{3}+c_2=\frac{1}{2}+c_3$, ובנוסף :

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)\Longrightarrow c_1=c_3$, ופתרון שתי משוואות אלו יניב :

$$, f(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}+c\,,x<0\\ \frac{x^3}{3}+c+\frac{1}{6},x>1\\ \frac{x^2}{2}+c\ \ ,0\le\ \ x\le 1\end{cases}$$ ונוכל להגדיר $c_3=c_1$ and $c_2=c_1+\frac{1}{6}$

וקיבלנו פונקציה רציפה , שמקיימת $\lim_{x\to 0^+}f^{(1)}(x)=\lim_{x\to 0^-}f^{(1)}(x)$ וגם $\lim_{x\to 1^+}f^{(1)}=\lim_{x\to 1^-}f^{(1)}(x)$, לכן היא גזירה גם בנקודות התפר האלו ולכן גזירה על כל הישר ונגזרתה היא הפונקציה ממנה התחלנו .

.2

$$\mathrm{I}_m=\int x^{\alpha}ln^{\mathrm{m}}xdx\ =_{\text{חלקים}}=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}ln^m(x)-\int\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}m\cdot ln^{m-1}(x)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}ln^m(x)-\int\frac{x^{\alpha}}{\alpha+1}m\cdot ln^{m-1}(x)dx=\mathbf{\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln^m(x)-\frac{m}{\alpha+1}\cdot I_{m-1}+C}$$

.3 א. נבצע חילוק פולינומים מכיוון שדרגת המונה גדולה מזו של המכנה ואחרי החלוקה נקבל : $x^3+3x^2+5x+7=(x+3)\cdot(x^2+2)+3x+1$ ומכאן נקבל :

$$\int\frac{(x+3)\cdot(x^2+2)+3x+1}{x^2+2}=\int(x+3)dx+\int\frac{3x+1}{x^2+2}dx=\frac{x^2}{2}+3x+\int\frac{3x+1}{x^2+2}dx$$

נותר לחשב את האינטגרל :

$$\int\frac{3x+1}{x^2+2}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x)+1}{x^2+2}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x}{x^2+2}dx+\int\frac{1}{x^2+2}dx=$$

$$\frac{3}{2}\ln(x^2+2)+\int\frac{1}{x^2+\sqrt{2}^2}dx=\boldsymbol{\frac{3}{2}\ln(x^2+2)+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C}$$

<u>ולכן התשובה הסופית היא</u> : $\boldsymbol{\frac{x^2}{2}+3x+\frac{3}{2}\ln(x^2+2)+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C}$

ב. $\int (\frac{1-x}{x})^2 dx = \int \frac{1-2x+x^2}{x^2} dx = \int \left[\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1\right] = -\frac{1}{x} - 2ln|x| + x + C$

ג. $\int \frac{e^x}{e^x + e^{\frac{x}{2}}} dx = \int \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+1} dx =_{u=e^{\frac{x}{2}}} = \int \frac{2du}{u+1} = 2ln\left|e^{\frac{x}{2}} + 1\right| + C$

ד. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}} =_{t=\sqrt{2x-3}} = \cdots = \sqrt{2x-3} + C$

ה.

$$\int \frac{1}{1+e^x}dx \underset{\substack{t=e^x \\ dt=e^x dx}}{=} \int \frac{1}{1+t}\frac{1}{e^x}dt = \int \frac{1}{t(t+1)}dx = \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}dx = \ln t - \ln(t+1) + C$$

$$= x - \ln(e^x+1) + C$$

ו. $\int \sin(\ln(x))dx$

פתרון:

$$\int \sin(\ln(x))dx = x\sin(\ln(x)) - \int x\cos(\ln(x))\frac{1}{x}dx = x\sin(\ln(x)) - \int \cos(\ln(x))dx =$$

$$= x\sin(\ln(x)) - \left[x\cos(\ln(x)) - \int -x\sin(\ln(x))\frac{1}{x}dx\right] =$$

$$= x\sin(\ln(x)) - x\cos(\ln(x)) - \int \sin(\ln(x))dx$$

ולכן $\int \sin(\ln(x))dx = \frac{1}{2}\left[x\sin(\ln(x)) - x\cos(\ln(x))\right]$

ז. $\int 2x \arctan x dx$

פתרון:

$$\int 2x\arctan x dx = x^2\arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2}dx = x^2\arctan x - \int \frac{-1+1+x^2}{1+x^2}dx =$$

$$= x^2\arctan x - \left[\int \frac{-1}{1+x^2}dx + \int dx\right] = x^2\arctan x + \arctan x - x + C =$$

ח. $\int sin^6x \cdot cos^2xdx$

פתרון:

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$ ולכן $\sin^2 x\cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x$.

$\cos 2x = 1-2\sin^2 x$ ולכן $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ ו $\sin^4 x = \frac{1}{4}(1-\cos 2x)^2$.

נכפיל את שתי המשוואות האחרונות לקבל $\int \sin^6 x\cos^2 xdx = \int \sin^4 x\sin^2 x\cos^2 xdx =$

$$= \int \frac{1}{4}(1-\cos 2x)^2 \frac{1}{4}\sin^2 2xdx = \frac{1}{16}\left[\int \sin^2 2xdx - \int 2\cos 2x\sin^2 2xdx + \int \cos^2 2x\sin^2 2xdx\right].$$

נחשב כל אחד מן האינטגרלים:

$\cos 4x = \cos 2\cdot 2x = 1-2\sin^2 2x$ ולכן $\int \sin^2 2xdx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 4x)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + C$

$\int 2\cos 2x \sin^2 2xdx$, נבצע הצבה $t=\sin 2x$ ולכן $dt = 2\cos 2xdx$ ונקבל

$$\int 2\cos 2x \sin^2 2xdx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}\sin^3 2x + C$$

$\cos^2 2x \sin^2 2x = \left(\frac{1}{2}\sin 4x\right)^2$ אבל $\cos 8x = 1-2\sin^2 4x$ ולכן

$$\int \cos^2 2x \sin^2 2xdx = \frac{1}{4}\int \sin^2 4xdx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 8x)dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{64}\sin 8x + C$$

נציב את כל התוצאות האלה לקבל את התשובה הסופית.

ت.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\sin x \mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin x \mathrm{d}x}{1-\cos^2 x} \underset{\substack{t=\cos x \\ dt=-\sin x dx}}{=} -\int \frac{1}{1-t^2} dt$$

$$\int \frac{1}{t^2-1} dt = \frac{1}{2} \int (\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}) dt = \frac{1}{2} \ln(t-1) - \frac{1}{2} \ln(t+1) + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln(\cos x - 1) - \frac{1}{2} \ln(\cos x + 1) + C$$