שם הקורס: טופולוגיה
שם המרצה: דר' נוביק
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

פתרון תרגיל בית 2 - טופולוגיה

שאלה 1

תזכורת: הגדרנו בכיתה את המטריקה ה p-adic באופן הבא: עבור $p\in\mathbb{N}$ ראשוני מגדירים מטריקה על $\mathbb{Z}$-

$d_p(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ \frac{1}{p^{k(x,y)}} & x\neq y\end{cases}$, עבור $k(x,y)=\max\{i: p^i \mid (x-y)\}$.

א. הוכיחו ש $p^n \xrightarrow{d_p} 0$.

ב. תארו את הכדור $B_{d_7}\left(3,\frac{1}{49}\right)$ במרחב $(\mathbb{Z},d_7)$.

ג. עבור $t\in\mathbb{Z}$ מצאו דוגמה לסדרה לא קבועה במרחב $(\mathbb{Z},d_3)$ המתכנסת ל- t.

פתרון

א. $k(p^n,0)=\max\{i:\ p^i \mid (p^n-0)\}=n\Rightarrow d_p(p^n,0)=\frac{1}{p^n}\underset{n\to\infty}{\to}0\Rightarrow p^n\xrightarrow{d_p}0$.

ב. $B_{d_7}\left(3,\frac{1}{49}\right)=\left\{x\in\mathbb{Z}: d_7(x,3)<\frac{1}{7^2}\right\}$ ולכן $\frac{1}{7^{k(x,3)}}<\frac{1}{7^2}$ ולכן $k(x,3)\geq 3$

ומכאן $7^3 \mid (x-3)$ ולכן הכדור הוא $3+7^3\mathbb{Z}$.

ג. למשל: $x_n=3^n+t$ שכן מתקיים $d_3(x_n,t)=\frac{1}{3^n}\to 0$.

מש"ל

שאלה 2

יהיו $x_1,x_2\in(X,d)$ ו- $r_1,r_2>0$ ויהיו $B(x_1,r_1),B(x_2,r_2)$ כדורים פתוחים שחיתוכם אינו ריק. תהי $p\in B(x_1,r_1)\cap B(x_2,r_2)$, ו -

$r=\min\{r_1-d(p,x_1),r_2-d(p,x_2)\}$

הוכיחו ש- $B(p,r)\subseteq B(x_1,r_1)\cap B(x_2,r_2)$.

<u>פתרון</u>

<u>טענת עזר</u>:

תהי $p\in B(x,R)$ ונניח שמתקיים $0<r\le R-d(x,p)$, אזי $B(p,r)\subseteq B(x,R)$.

<u>הוכחת טענת עזר</u>:

יהי $z\in B(p,r)$ אזי $d(p,z)<r$. $d(z,x)\le d(z,p)+d(p,x)<r+d(p,x)\le R$ ולכן $z\in B(x,R)$.

הערה: אכן מתקיים $0<R-d(x,p)$ שכן $p\in B(x,R)$.

מש"ל טענת עזר.

כעת, יהי $r=\min\{r_2-d(p,x_2),r_1-d(p,x_1)\}$. מהעובדה ש-$p\in B(x_1,r_1)$ ומטענת העזר נובע ש-$B(p,r)\subseteq B(x_1,r_1)$ (הציבו $x=x_1,\ R=r_1$). באופן דומה נקבל $B(p,r)\subseteq B(x_2,r_2)$.

מש"ל

שאלה 3

<u>הגדרה</u>: תהי $\{x_n\}$ סדרה במרחב מטרי כלשהו (X,d). נאמר שהסדרה היא "קבועה לבסוף" אם קיים $x\in X$ כך שקיים $n_0\in\mathbb{N}$ עבורו לכל $n\ge n_0$ מתקיים $x_n=x$.

א. הוכיחו כי בכל מרחב מטרי, כל סדרה קבועה לבסוף מתכנסת.

ב. הוכיחו כי סדרה מתכנסת במרחב מטרי **דיסקרטי** אם ורק אם היא קבועה לבסוף.

ג. אפיינו את סדרות הקושי במרחב הדיסקרטי (כלומר, נסחו תנאי מספיק והכרחי להיות סדרה כלשהי סדרת קושי, והוכיחו תנאי זה!).

ד. הסיקו שכל מרחב דיסקרטי הוא שלם.

<u>פתרון</u>

א. נניח ש $\{x_n\}$ קבועה לבסוף אזי קיימים $x \in X$, $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $x_n = x$. נראה שהסדרה $\{x_n\}$ מתכנסת ל x. יהי $\varepsilon > 0$ אזי לכל $n \geq n_0$ מתקיים $d(x_n, x) = d(x, x) = 0 < \varepsilon$.

ב. מספיק להוכיח (עפ"י סעיף א') שכל סדרה מתכנסת במ"מ דיסקרטי היא קבועה לבסוף.

נניח $\{x_n\} \to x$ במ"מ דיסקרטי, אזי קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $d(x_n, x) < 1$; אך זה אומר בהכרח שלכל $n \geq n_0$ $d(x_n, x) = 0$ (המרחקים האפשרים הם רק 0 או 1). מכאן $x_n = x$ לכל $n \geq n_0$.

ג. סדרה במרחב דיסקרטי היא קושי אמ"מ היא קבועה לבסוף.

כיוון ראשון: אם הסדרה קבועה לבסוף היא מתכנסת (לפי סעיף א') וסדרה מתכנסת היא קושי.

בכיוון שני: נניח שהסדרה היא סדרת קושי ונוכיח שהיא קבועה לבסוף.
מהגדרת קושי עבור $\varepsilon = 1$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m, n \geq n_0$ מתקיים $d\left(x_n, x_m\right) < 1$. מהגדרת המטריקה הדיסקרטית נובע ש- $x_m = x_n$ לכל $m, n \geq n_0$, ובפרט $x_n = x_{n_0}$ לכל $n \geq n_0$ ולכן הסדרה קבועה לבסוף.

ד. תהי $\{x_n\}$ סדרת קושי. לפי סעיף ג' היא קבועה לבסוף ולפי סעיף א' היא מתכנסת.

מש"ל

<u>שאלה 4</u>

במרחב ℓ_∞ הראו שהסדרה $x_n=\left(\frac{n+1}{n},\frac{n+2}{2n},\frac{n+3}{3n},...\right)$ מתכנסת, ומצאו את גבולה.

<u>פתרון</u>

הגבול הוא $x=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...\right)$. הוכחה: מתקיים $d\left(x_n,x\right)=\frac{1}{n}\to 0$ (מדוע?).

מש"ל

<u>שאלה 5</u>

א. הוכיחו את הטענה הכללית הבאה: יהי $\left(X,\sigma\right)$ מרחב מטרי, ויהי $\left(Y,\sigma_Y\right)$ תת מרחב מטרי שלו. תהי $\{x_n\}\subseteq Y$ ו- $y\in Y$. אזי $x_n\xrightarrow{\sigma_Y}y$ אמ"מ $x_n\xrightarrow{\sigma}y$.

נתבונן במרחב $\langle\mathbb{I},d\rangle$ כאשר $\mathbb{I}$ הוא קבוצת המספרים האי-רציונאליים, ו- d היא המטריקה הסטנדרטית המושרית מ- $\mathbb{R}$. נגדיר את הסדרה הבאה:
$$x_n=\frac{n+\sqrt{2}}{n-\sqrt{2}}.$$

ב. הוכיחו שהסדרה $\{x_n\}\subseteq\mathbb{I}$.

ג. הוכיחו שהסדרה אינה מתכנסת בתת המרחב המטרי $\langle\mathbb{I},d\rangle$.

<u>פתרון</u>

א. שימו לב שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\sigma\left(x_n,y\right)=\sigma_Y\left(x_n,y\right)$ ולכן $x_n\xrightarrow{\sigma_Y}y$ אמ"מ $\sigma_Y\left(x_n,y\right)\to 0$ אמ"מ $\sigma\left(x_n,y\right)\to 0$ אמ"מ $x_n\xrightarrow{\sigma}y$.

ב. נניח בשלילה שקיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- x_n רציונאלי. אזי קיימים p,q שלמים כך ש- $\frac{n+\sqrt{2}}{n-\sqrt{2}} = \frac{p}{q}$. לאחר כפל בהצלבה מקבלים $qn + q\sqrt{2} = pn - p\sqrt{2}$ ולכן $\sqrt{2} = \frac{pn-qn}{q+p}$, בסתירה לכך ש- $\sqrt{2}$ הוא אי-רציונאלי.

ג. נניח בשלילה שהסדרה מתכנסת בתת המרחב, כלומר $x_n \to a \in \mathbb{I}$. לכן (לפי סעיף א') היא מתכנסת ב- $\mathbb{R}$. קל לראות ש- $x_n \to 1$. מיחידות הגבול במרחב מטרי נקבל $a=1$ וזו סתירה.

מש"ל

<u>שאלת אתגר</u> (לא להגשה)

הראו שאם $(X,\|\cdot\|)$ מרחב נורמי ו- d המטריקה המושרה מהנורמה אזי **לא** קיימים כדורים **שונים** $B(a_1,r_1), B(a_2,r_2)$ כאשר $r_1 < r_2$ ו $B(a_1,r_1) \supset B(a_2,r_2)$.

<u>פתרון</u>

נניח $a_2 \neq a_1$ וכן $r_1 < r_2$ ונניח בשלילה ש $B(a_2,r_2) \subseteq B(a_1,r_1)$ אזי $a_2 \in B(a_2,r_2) \subseteq B(a_1,r_1)$ ולכן $\| a_2 - a_1 \| < r_1$. יהי $v = a_1 + r_1 \cdot \frac{a_2-a_1}{\| a_2 - a_1 \|}$ (שימו לב אם היינו ב $\mathbb{R}^2$ המשמעות הגיאומטרית היתה חיבור של הוקטור a_1 לוקטור עם נורמה r_1 בכיוון של $a_2 - a_1$) מתקיים:

$$\|v-a_2\| = \left\| a_1 + r_1 \cdot \frac{a_2-a_1}{\|a_2-a_1\|} - a_2 \right\| = \left\| (a_2-a_1) \cdot \left(\frac{r_1}{\|a_2-a_1\|} - 1 \right) \right\|$$
$$= \left\| (a_2-a_1) \frac{r_1 - \|a_2-a_1\|}{\|a_2-a_1\|} \right\| =$$
$$\frac{\|a_2-a_1\|}{\|a_2-a_1\|} \left| r_1 - \|a_2-a_1\| \right| = r_1 - \|a_2-a_1\| < r_1 < r_2$$

לכן $v \in B(a_2,r_2)$ אבל $v \notin B(a_1,r_1)$ שכן: $\|v-a_1\| = r_1$.

הערה : $a_2 \neq a_1$ ולכן בהכרח $\|a_2 - a_1\| \neq 0$ ומכאן שהביטוי $\frac{a_2 - a_1}{\|a_2 - a_1\|}$ מוגדר.

קיבלנו סתירה להנחה.

מש"ל