

פיסיקה למתמטיקאים 88-320

תרגיל 5

1. נתונה מטוטלת פוקו המורכבת מחוט חסר מסה באורך ℓ ומסה m בקצהו. המטוטלת ממוקמת בקו רוחב λ (ביחס לאופק) ונוטה בזווית θ . המהירות הזוויתית של כדור הארץ Ω .

(א) רשמו את הלגראנג'יאן של המטוטלת והראו כי הוא ניתן לכתיבה (עד כדי קבוע) בצורה

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + 2\Omega \sin \lambda L + o(\Omega)$$

כאשר \mathcal{L}_0 לגראנג'יאן "רגיל" של אוסילטור דו-מימדי בקורדינטות קרטזיות ו L התנע הזוויתי

(הדרכה: רשמו את מהירות המטוטלת במערכת האינרציאלית ("הרגילה"),
 כאשר $\vec{v} = \vec{v}' + 2\vec{\Omega} \times \vec{r}$ עבור הפוטנציאל, כך ש $m\omega^2 \ell^2 \cos \theta \approx m\omega^2 \ell^2 (1 - \frac{1}{2}\theta^2)$ כאשר $\omega^2 = g/\ell$
 בנוסף הניחו ש $\ell^2 \theta^2 \approx x^2 + y^2$ כלומר הזניחו את התנועה בכיוון \hat{z} . כמוכן
 הזניחו איברים $O(\Omega^2)$.)

(ב) כתבו את משוואות אויילר לגראנג' והשוו למשוואות התנועה שקיבלנו בכיתה.

(ג) הוכיחו כי התנע הזוויתי אינו נשמר (רמז: שני לגראנג'יאנים $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ הנבדלים בקבוע, כלומר $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 + const$, שומרים על משוואות התנועה)

(ד) מצאו גודל נשמר באמצעות משפט נתר (רמז: סיבוב אינפיניטיסימלי $x \rightarrow x + \epsilon y, y \rightarrow y - \epsilon x$)

(ה) משוואת התנועה של התנע הזוויתי נתונה ע"י $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$ כאשר $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$
 מומנט הכח \vec{F} . מצאו את המומנט שמפעיל כח קוריוליס (רמז: סעיף (ד))

2. הראו כי $f_X(x) = \frac{\lambda^r}{(r-1)!} x^{r-1} e^{-\lambda x}, x > 0$ ו $r = 1, 2, 3, \dots, \lambda > 0$, פונקצית צפיפות הסתברות. חשבו את $std(X)$.

$$\left(\int_0^\infty x^k e^{-ax} dx = \frac{k!}{a^{k+1}} \right)$$

3. צפרדע קופצת מטר בכל פעם, ימינה בהסתברות $\frac{3}{4}$ ושמאלה בהסתברות $\frac{1}{4}$. מה ההסתברות שלאחר 10 קפיצות תימצא הצפרדע שני מטרים ימינה מנקודת המוצא ?

4. למתח של אות הנקלט בגלאי יש צפיפות נורמלית $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. נגדיר משתנה אקראי חדש $Y = 4X^2$. מצאו את צפיפות ההסתברות של Y , $h_Y(y)$.
 (הדרכה: התבוננו בפונקצית ההצטברות $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(s) ds$ והביעו באמצעותה את ההסתברות $P\left(-\frac{\sqrt{y}}{2} \leq X \leq \frac{\sqrt{y}}{2}\right)$)