תזכורת

תהא G חבורה, A,B ת"ק בG, אזי $AB:=\{ab:a\in A,b\in B\}$

עובדה

נניח G חב', $H,K\leq G$(ת"ח), HK לא בהכרח תת חבורה.

הוכחה

תהא $G=S_3$,

$$H=\left\langle \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\right\rangle =\left\{ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\right\}$$

$$K=\left\langle \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\right\rangle =\left\{ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\right\}$$

$$HK=\left\{ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

$|HK|=4\nmid6=|S_3|$ לכן HK אינה ת"ח של S_3

טענה

תהא G חב', $H\leq G$, $N\trianglelefteq G$. אזי $HN\leq G$.

הוכחה

ראשית HN אינה ריקה(מדוע?). לכן מ"ל HN סגורה תחת כפל והפכי.

טענת עזר

תהא $N\trianglelefteq G$. אז לכל $g\in G$, $n\in N$. קיים $n_0\in N$ כך ש$ng=gn_0$

הוכחת ט.ע.

N תח"נ, לכן $Ng=gN$. $\Leftarrow$לכל $n\in N$ $ng\in gN$$\Leftarrow$קיים $n_0\in N$ כך ש$ng=gn_0$.
מש"ל ט.ע.

המשך הוכחה

כעת נראה HN סגורה תחת כפל.

לכל זוג איברים בHN h_1n_1,h_2n_2 כאשר $h_1,h_2\in H,n_1,n_2\in N$ מתקיים

$$\left(h_1n_1\right)\left(h_2n_2\right)=h_1\left(n_1h_2\right)n_2=h_1h_2n_0n_2=\left(h_1h_2\right)\left(n_0n_2\right)\in HN$$

סגירות תחת הפכי:

לכל איבר בHN ,$hn \in HN$,$h \in H, n \in H$:

$$(hn)^{-1} = n^{-1}h^{-1} = h^{-1}n_0 \in HN$$

<u>הוכחנו</u>: $H \leq G$, $N \trianglelefteq G$ אזי $HN \leq G$

משפט האיזומורפיזם הII

תהא H חב'. $H \leq G$, $N \trianglelefteq G$. אזי:

(i) $H \cap N \trianglelefteq H$

(ii) ${}^{H}/_{H \cap N} \cong {}^{HN}/_{N}$

הערה

$N \leq HN \leq G$, מאידך $N \trianglelefteq G$, לכן(עובדה משעור קודם) $N \trianglelefteq HN$, לכן ${}^{HN}/_{N}$ קיימת.

הוכחת משפט האיז' הII

נגדיר העתקה $\varphi : H \to {}^{HN}/_{N}$ ע"י $\forall h \in H, \varphi(h) := hN$. נוכיח φ על והומ'.

φ על: לכל $x \in {}^{HN}/_{N}$ קיים $z \in HN$ כך ש$x = zN$. עבור z כזה קיים $h \in H$ כך ש$z = hn$, ואז $x = ZN = hnN = hN = \varphi$.

φ הומ': לכל $h_1, h_2 \in H$, $\varphi(h_1h_2) = h_1h_2N = h_1Nh_2N = \varphi(h_1)\varphi(h_2)$. לכן, לפי משפט האיז' הI, ${}^{H}/_{\ker\varphi} \cong {}^{HN}/_{N}$. נותר להוכיח $\ker\varphi = H \cap N$(מדוע מ"ל זאת?). אכן,

$$\ker\varphi = \left\{h \in H : \varphi(h) = e_{{}^{HN}/_{N}}\right\} = \{h \in H : hN = N\} = \{h \in H : h \in N\} = H \cap N$$

דוגמה

$G = \mathbb{Z}$, $H = 12\mathbb{Z}$, $N = 8\mathbb{Z}$.

$$H \cap N = 24\mathbb{Z}$$

$$H + N = \{8k + 12m : k, m \in \mathbb{Z}\} = 4\mathbb{Z}$$

קיבלנו(לפי משפט האיז' הII):

$${}^{12\mathbb{Z}}/_{24\mathbb{Z}} \cong {}^{4\mathbb{Z}}/_{8\mathbb{Z}}$$

באופן כללי

<u>נסמן</u>: עבור $m,k\in\mathbb{Z}$:

כממ=כפולה משותפת מינימלית של m וk=: $[m,k]$

מחלק משותף מקסימלי של m וk=: $[m,k]$

לפי משפט האיז' הII: ניקח $G=\mathbb{Z}$, $H=k\mathbb{Z}$, $N=m\mathbb{Z}$ ונקבל $\mathrm{k\mathbb{Z}}/_{\mathrm{[m,k]\mathbb{Z}}}\cong\mathrm{(m,k)\mathbb{Z}}/_{\mathrm{m\mathbb{Z}}}$

משפט ההתאמה

יהא $\varphi:G\to L$ אפימורפיזם.

1. יש התאמה חח"ע ועל(תחת φ) מת"ח של G שמכילות את הגרעין של φ לת"ח של L.
2. יש התאמה חח"ע ועל(תחת φ) מתח"נ של G שמכילות את $\ker\varphi$ לתח"נ של L.

הוכחה

קלה וארוכה

נושא: חבורות סימטריה

הגדרה

תהא X קבוצה. $S\left(X\right):=\left\{ f:X\to X:\begin{array}{c} f\,injective\\ f\,surjective \end{array}\right\}$ עם פעולות הרכבת פונקציות: $f\circ g$.

עובדה $S\left(X\right)$ היא חבורה

עובדה 2 אם X,Y קבוצות עם $|X|=|Y|$ אז $S\left(X\right)\cong S\left(Y\right)$. לכן ניתן לסמן(עד כדי איזומורפיזם) $S_{|X|}$.

בד"כ נעסוק ב$|X|<\infty$ ונניח: אם $|X|=n$ בה"כ $X=\{1,2,...n\}$, כלומר $S_{n}=S\left(\{1,2,...n\}\right)$

סימון

$\pi\in S_{n}$, נסמן $\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \pi\left(1\right) & \pi\left(2\right) & \cdots & \pi\left(n\right) \end{pmatrix}$

כתיבה מחזורית

דוגמה

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\ 3 & 4 & 6 & 1 & 5 & 9 & 10 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\pi = (1,3,6,9,7,10,2,4)\,(5)\,(8)$$

עוד דוגמה

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_6$$

$$\sigma = (1,3,5)\,(2,6)\,(4)$$

הגדרה פורמלית

מחזור $\gamma \in S_n$ מאורך k (לאיזשהו $2 \le k \le n$) הוא תמורה, עבורה קיימת סדרה $a_1, a_2, ...a_k$ של ספרות שונות מתוך $\{1,2,...n\}$ ומתקיים $\gamma(a_i) = a_{i+1}$ לכל $1 \le i < k$, $\gamma(a_k) = a_1$, ולכן $j \in \{1,2,...n\} \setminus \{a_1,...a_k\}$ $\gamma(j) = j$.

דוגמה

$$\gamma = (1,3,5,7,8) \in S_{10}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 & 8 & 1 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

הערה

$$(1,3,5,7,8) = (3,5,7,8,1) = (5,7,8,1,3) = ...$$

סימון

$$[n] := \{1,2,...n\}$$

הגדרה

נקודות שבת של $\pi \in S_n$ הן הספרות $i \in [n]$ כך ש$\pi(i) = i$

סימון: $Fix(\pi) := \{i \in [n] : \pi(i) = i\}$

תומך של π_i הוא המשלים $Supp(\pi) := [n] \setminus Fix(\pi)$

הגדרה

תמורות $\pi, \sigma \in S_n$ זרות אם $Supp(\pi) \cap Supp(\sigma) = \emptyset$

עובדה

אם $\pi, \sigma \in S_n$ זרות אז $\pi\sigma = \sigma\pi$

משפט(הכתיבה המחזורית של תמורה)

כל תמורה $\pi \in S_n$ ניתן לכתוב כמכפלה של מחזורים זרים. הכתיבה הזו יחידה עד כדי סדר הגורמים והסדר המחזורי של הספרות בכל מחזור.

הגדרה

המבנה המחזורי של תמורה $\pi \in S_n$ הוא וקטור של אורכי המחזורים בסדר יורד חלש.
לדוגמה, בדוגמה בה פתחנו מבנה המחזורים $(8,1,1)$

הגדרה

חילוף הוא מחזור באורך 2: (i,j)

למשל, החילופים בS_3: $(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, (1,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, (2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

נסמן T_n קב' החילופים בS_n

עובדה

לכל $\tau \in T_n$, $\tau^2 = e$ (e - תמורת הזהות)

משפט

לכל $2 \le n$, $S_n = \langle T_n \rangle$

הוכחה

מ"ל כל תמורה היא מכפלה של מס' סופי של מחזורים. תהא $\pi \in S_n$. נכתוב את π בכתיבה מזחרוית(זה אפשרי לפי משפט קודם)

עובדה לכל מחזור מאורך k , $\gamma = (a_1, a_2)(a_2, a_3)\cdots(a_{k-1}, a_k)$

מסקנה מכיוון שכל מחזור מכפלה של חילופים וכל תמורה מכפלה של מחזורים נקבל שכל תמורה מכפלה של חילופים ■

תזכורת משנה א'

היפוך בתמורה $\pi \in S_n$ הוא זוג $1 \leq i < j \leq n$ כך ש$\pi(i) > \pi(j)$
קבוצת ההיפוכים $Inv(\pi) := \{1 \leq i < j \leq n : \pi(i) > \pi(j)\}$
מספר ההיפוכים $inv(\pi) := |Inv(\pi)|$
סימן של תמורה: $sign(\pi) := (-1)^{inv(\pi)} = \begin{cases} 1 & 2 \mid inv(\pi) \\ -1 & 2 \nmid inv(\pi) \end{cases}$
תמורה זוגית אם $sign(\pi) = 1$
תמורה אי זוגית אם $sign(\pi) = -1$
קבוצת התמורות הזוגיות: $A_n := \{\pi \in S_n : sign(\pi) = n\}$

דוגמה

S_3:

π	$inv(\pi)$	$sign(\pi)$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	0	1
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	1	-1
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	1	-1
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	2	1
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	2	1
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	3	-1

משפט

לכל $2 \leq n$, ההעתקה $sign : S_n \to \{-1, 1\}$ המוגדרת עהההעתקה $sign : S_n \to \{-1, 1\}$ המוגדרת ע"י "י $\forall \pi \in S_n, sign(\pi) := (-1)^{inv(\pi)}$, היא אפימורפיזם מ$S_n$ לחבורה הכפלית $(\{-1, 1\}, \cdot, 1)\ (\cong \mathbb{Z}_2)$
נוכיח בשיעור הבא
מסקנות:

מסקנה 1

לכל $1 \leq n$, $A_n \trianglelefteq S_n$

הוכחה

$\ker sign = A_n$

מסקנה 2

$$|A_n| = \frac{n!}{2}$$

הוכחה

לפי משפט האיז' הI, לכל $2 \leq n$: $S_n/\ker sign \cong \mathbb{Z}_2 \Leftarrow S_n/A_n \cong \mathbb{Z}_2 \Leftarrow |S_n/A_n| = |\mathbb{Z}_2| = 2$.
לפי ההגדרה $|S_n/A_n| = [S_n : A_n] = 2$. לפי משפט לגרנג'

$$|S_n| = |A_n| [S_n : A_n]$$

$$n! = |A_n| \cdot 2$$

$$\Rightarrow |A_n| = \frac{n!}{2}$$