מערכות של משוואות דיפרנציאליות

לפעמים נצטרך כמה מד"ר בו זמנית. עדיין יהיה משתנה בלתי תלוי אחד(נקרא לו t) אבי יהיו יותר משתנים שתלויים בו(בד"כ $y_1(t), y_2(t)$). מערכת לאו דווקא לינארית נראית

$$x_1(t) = x_1' = f_1(t, x)$$

מערכת מד"ר לינארית היא

$$\vec{y}'(t) = A(t) \cdot \vec{y}(t) + \vec{b}(t)$$

כאשר:

- $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ הנעלם אותו צריך למצוא.
- $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$ מטריצה שרכיביה פונקציות של t.
- $\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$ וקטור שרכיביו פונקציות של t.

עם $\vec{b} = 0$ נאמר שהמערכת הומוגנית.

לדוגמה

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) = 0x - 1y \\ y'(t) = x(t) = 1x + 0y \end{cases}$$

בצורה מטריציונית

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

נגזור את המשוואה הראשונה

$$x'' = -y' = -(x)$$

$$x'' + x = 0$$

מ. אופיינית

$$m^2=-1$$

$$m_{1,2}=\pm i$$

$$x\left(t\right)=C_1\cos t+C_2\sin t$$

מהמשוואה הראשונה

$$y=-x'=-\left(-C_1\sin t+C_2\cos t\right)=C_1\sin t-C_2\cos t$$

הפתרון הוא

$$\boxed{\begin{pmatrix}x\left(t\right)\\ y\left(t\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1\cos t+C_2\sin t\\ C_1\sin t-C_2\cos t\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}\sin t\\ -\cos t\end{pmatrix}}$$

דוגמה נוספת

$$*\left\{\begin{array}{c}y_1'=y_1\\ y_2'=2y_2\end{array}\right.\qquad\vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\left(t\right)\\ y_2\left(t\right)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}1&0\\ 0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

$$*\left\{\begin{array}{c}y_1=C_1e^t\\ y_2=C_2e^{2t}\end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1e^t\\ C_2e^{2t}\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}e^t+C_2\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}e^{2t}}$$

באופן כללי בכדי לפתור מד"ר לינארית הומוגנית מסדר ראשון(הנגזרת הכי גבוהה היא נגזרת ראשונה) של n פונקציות עלינו למצוא n פתרונות בת"ל $\vec{y}_1,...\vec{y}_n$ ולקחת צירוף לינארי שלהם $\left(C_1\vec{y}_1+C_2\vec{y}_2+...+C_n\vec{y}_n\right)$. המטריצה$(n\times n)$

$$Y=\begin{pmatrix}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\ \vec{y}_1&\cdots&\vec{y}_n\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\end{pmatrix}$$

נקראת מטריצה יסודית(אך היא לא יחידה).

למשל עבור המטריצה הראשונה $Y=\begin{pmatrix}\cos t&\sin t\\ \sin t&-\cos t\end{pmatrix}$ היא מטריצה יסודית.

דרך טובה לבדוק תלות לינארית בין $\vec{y}_1,...\vec{y}_n$ היא להסתכל על $W=\det\left(Y\right)$. אם $W\neq 0$ הפתרונות בת"ל, אחרת $W=0$ הם ת"ל.
במקרה שלנו $\det\left(Y\right)=-\cos^2 t-\sin^2 t=-1\neq 0$ - קיבלנו בת"ל!

נוסחאת ליוביל (ליוביל אוסטרוגרצסקי)

לכל t,t_0 בתחום המדובר

$$\det\left(Y\left(t\right)\right)=\det\left(Y\left(t_0\right)\right)e^{\int_{t_0}^{t}\operatorname{tr}\left(A\left(\xi\right)\right)d\xi}$$

בעזרתה ניתן למצוא פתרון אחד אם ידועים $n-1$ פתרונות אחרים.

דוגמה לשימוש בנוסחה

פתור את המערכת $\vec{y}\,'=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{t}\\ 1+t & -1\end{pmatrix}\vec{y}$ בתחום $t\in\left(0,\infty\right)$. העזר בכך ש $\vec{y}_p=\begin{pmatrix}1\\ t\end{pmatrix}$.
למה $\vec{y}_p$ פתרון פרטי?

$$\vec{y}_p\,'=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{t}\\ 1+t & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

פתרון

יהי $y_1\left(t\right)$, $y_2\left(t\right)$ פתרון נוסף של המערכת בת"ל. נבנסה מטריצה יסודית $Y=\begin{pmatrix}y_1\left(t\right) & 1\\ y_2\left(t\right) & t\end{pmatrix}$.
במקרה שלנו

$$A\left(\xi\right)=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{\xi}\\ 1+\xi & -1\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{tr}\left(A\left(\xi\right)\right)=0=1-1$$

ניקח $t_0\in\left(0,\infty\right)$ <u>קבוע</u>, אזי לכל $t\in\left(0,\infty\right)$ ליוביל אומר

$$\det\left[Y\left(t\right)\right]=\det\left[Y\left(t_0\right)\right]e^{\int_{t_0}^{t}0d\xi}$$

$$t\cdot y_1\left(t\right)-y_2\left(t\right)=\det\left[Y\left(t_0\right)\right]=C_1$$

(C_1 לא תלוי בt)

לפי המערכת $\begin{pmatrix}y_1\\ y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{t}\\ 1+t & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$

$$y_1'\left(t\right)=y_1\left(t\right)-\frac{y_2\left(t\right)}{t}=\frac{t-y_0\left(t\right)-y_2\left(t\right)}{t}=\frac{L_1}{t}$$

$$y_1'(t)=\frac{C_1}{t}$$

$$y_1(t)=C_1\ln|t|+C_2=C_1\ln t+C_2$$

(כי $t\in(0,\infty)$ חיובי)

$$\frac{y_2(t)}{t}=y_1(t)-y_1'(t)=C_1\ln t+C_2-\frac{C_1}{t}$$

$$\frac{y_1(t)}{t}=C_1\ln t+C_2-\frac{C_1}{t}$$

$$\boxed{y_1(t)=C_1t\ln t+C_2t-C_1}$$

קיבלנו פתרון $\begin{pmatrix} C_1\ln t+C_2 \\ C_1t\ln t+C_2t-C_1 \end{pmatrix}$

ניקח $\begin{cases} C_1=1 \\ C_2=0 \end{cases}$ ונקבל פתרון פרטי $\begin{pmatrix} \ln t \\ t\ln t-1 \end{pmatrix}$ שבהוא בת"ל עם $\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$.

המטריצה היסודית שקיבלנו $Y=\begin{pmatrix} \ln t & 1 \\ t\ln t-1 & t \end{pmatrix}$. הפתרון הכללי של המערכת:

$$\vec{y}=C_1\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} \ln t \\ t\ln t-1 \end{pmatrix}$$

איטרציות פיקארד

בהרצאה נלמד משפט הקיום והיחידות שמבטיח שלבעיית קושי $\begin{cases} y'=F(t,y) \\ y(t_0)=y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד(מקומית), בתנאי שf רציפה ומקיימת את תנאי ליפשיץ בy.

בהוכחה בנינו סדרה של פונקציות שמתכנסות לפתרון: $\begin{cases} \varphi_0(t)=y_0 \\ \varphi_{n+1}(t)=y_0+\int_{t_0}^{t}F(s,\varphi_n(s))\,ds \end{cases}$

דוגמה

פתור בעזרת קירובי פיקארד את הקירובים עד סדר 3 ונסה לנחש את הפתרון המדויק

$$\begin{cases} y'(t)=y(t)=F(t,y(t)) \\ y(0)=1 \end{cases}$$

פתרון

במקרה זה $F(t,y) = y$ שזוהי פונקציה נהדרת(בפרט מקיימת את תנאי ליפשיץ). הקירוב ההתחלתי הוא

$$n = 0 \quad \forall_t \varphi_0(t) = 1\,(= y_0)$$

$$\varphi_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s,\varphi_0(s))\,ds = 1 + \int_0^t F(s,1)\,ds$$

$$= 1 + \int_0^t 1ds = 1 + s|_0^t = 1 + t$$

$$\varphi_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s,\varphi_1(s))\,ds = 1 + \int_0^t F(s,1+s)\,ds$$

$$= 1 + \int_0^t (1+s)\,ds = 1 + s + \left.\frac{s^2}{2}\right|_0^t = 1 + t + t^2$$

$$\varphi_3(t) = 1 + \int_0^t F(s,\varphi_2(s))\,ds = 1 + \int_0^t \left(1 + s + \frac{s^2}{2}\right)ds = ... = \boxed{1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}}$$

אפשר להראות באינדוקציה

$$\varphi_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + ... + \frac{t^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} = e^t$$

זוהי שיטה נומרית שימושית(לפעמים)

הקשר בין מד"ר לבין מד"ר מסדר גבוה

כל מד"ר מסדר גבוה בצורה $y^{(n)} = F\left(t,y,y',...y^{(n-1)}\right)$ ניתן להביא לצורה של מערכת ע"י ההצבות $x_k = y^{(k-1)}, k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} x_1 &= y^{(0)} = y \\ x_2 &= y' \\ x_3 &= y'' \\ &\vdots \\ x_n &= y^{(n-1)} \end{aligned}$$

ואז

$$\begin{aligned}
x_1' &= y' = x_2 \\
x_2' &= (y')' = y'' = x_3 \\
&\vdots \\
x_{n-1}' &= \left(y^{(n-2)}\right)' = y^{(n-1)} = x_n \\
x_n' &= \left(y^{(n-1)}\right)' = y^{(n)} = F\left(t, x_1, x_2, ...x_n\right)
\end{aligned}$$

לדוגמה

$$2y'' = -5y' + y = 0$$

$$y'' = -\frac{1}{2}y + \frac{5}{2}y'$$

פתרון

נציב

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x_1' = y' = x_2 \\ x_2' = y'' = -\frac{1}{2}y + \frac{5}{2}y' = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{2}x_2 \end{cases}$$

בצורה מטריציונית: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ וזו מערכת של מד"ר.