

תרגיל בית 10 מבוא לתורת החבורות

88-211 סמסטר א' תשע"ז

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא בתרגול בשבוע המתחיל בתאריך ט' שבט ה'תשע"ז, 12.2.2017.

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. עבור חבורה G האם ההעתקה $f_x(g) = gxg^{-1}$ היא אוטומורפיזם של G ?

שאלה 2. תהי G חבורה סופית מסדר $2 \leq$. הוכיחו כי $|\text{Aut } G| \geq 2$.

שאלות להגשה

שאלה 3. תהי G חבורה. הוכיחו כי אם $|\text{Aut } G|$ ציקלית אז G אבלית.

שאלה 4. הוכיחו כי $|\text{Aut } S_3| = |\text{Inn } S_3| \cong S_3$.

שאלה 5. עבור חבורות G, H הוכיחו כי $|\text{Inn}(G \times H)| \cong |\text{Inn } G| \times |\text{Inn } H|$.

שאלה 6. החבורה $GL_n(\mathbb{C})$ היא מכפלה ישרה למחצה של שתי תת-חבורות שאחת מהן היא $SL_n(\mathbb{C})$. מהי תת-החבורה השנייה? (כמובן שהתשובה אינה יחידה, כל תשובה נכונה תתקבל).

שאלה 7. יהיו הומומורפיזמים $f : G \rightarrow H$ ו- $g : H \rightarrow G$ כך ש- $f \circ g = \text{id}_H$.

1. הזכרו כי g חח"ע ו- f על.

2. הוכיחו כי $G = \ker(f) \times \text{im}(g)$.

3. תהי G סופית ו- H ת"ח מאינדקס 2. הוכיחו שאם $f: G \rightarrow H$ אפימורפיזם כך ש $\ker f \not\subseteq H$ אז $G \cong H \times \mathbb{Z}_2$.

שאלה 8. תהי G חבורה מסדר $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

1. כמה תת-חבורות 5-סילו יכולות להיות ל- G ?

2. נניח שתת-חבורת 5-סילו Q היא נורמלית אבל לא מרכזית (כלומר לא מוכלת במרכז). מצא את סדר המרכז שלה $C_G(Q)$. (רמז: משפט N/C).

3. נניח שתת-חבורת 5-סילו אינה נורמלית. הוכח ש- G אינה פשוטה. (רמז: העידון של משפט קיילי).

בהצלחה!