תרגול 9 בקורס 88-211 אלגברה מופשטת

סמסטר א' תשע"ו, דצמבר 2015

1 עוד על החבורה הסימטרית

הגדרה 1. תהי $\sigma \in S_n$ תמורה. נציג אותה כמכפלת מחזורים זרים $\sigma = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k$. נניח כי האורך של σ_i הוא r_i, וכי $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_k$. נגדיר את מבנה המחזורים של σ להיות ה-k-יה הסדורה $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$.

דוגמה 2. מבנה המחזורים של התמורה $(1,2,3)(5,6)$ הוא $(3,2)$. מבנה המחזורים של $(1,5)(4,2,3)$ גם הוא $(3,2)$. מבנה המחזורים של $(1,2,3,4)(5,6)(7,8)$ הוא $(4,2,2)$.

תרגיל 3. הוכיחו שהמרכז של החבורה הסימטרית S_n הוא טריוויאלי עבור $n \geq 3$.

פתרון. תהי תמורה $\mathrm{id} \neq a \in Z(S_n)$. נראה בהמשך שישנה תמורה $a \neq b \in S_n$ בעלת אותו מבנה מחזורים. אזי כפי שראינו בתרגול הקודם, התמורות a, b הן צמודות. כלומר קיימת תמורה $\sigma \in S_n$ כך שמתקיים $\sigma a \sigma^{-1} = b$. אם a במרכז, אזי $b = \sigma a \sigma^{-1} = a\sigma\sigma^{-1} = a$, והגענו לסתירה להנחה לפיה $a \neq b$.

למה לכל תמורה $\mathrm{id} \neq a \in S_n$ עבור $n \geq 3$ ישנה תמורה $a \neq b \in S_n$ בעלת אותו מבנה מחזורים? אם יש ב-a מחזור $(i_1, i_2, i_{3,}, \ldots, i_r)$ עבור $r \geq 3$, אז אפשר להסתכל על b שזהה ל-a פרט למחזור זה שיוחלף במחזור $(i_2, i_1, i_{3,}, \ldots, i_r)$. אם a היא מכפלת חילופים $(i_1, i_2)(j_1, j_2)\ldots$, אז אפשר להסתכל על b שזהה ל-a פרט לשני החילופים הראשונים $(i_1, j_2)(j_1, i_2)\ldots$. אם a היא חילוף בודד (i_1, i_2), אז יש לפחות מספר אחד j שנקבע על ידי a, ואפשר לבחור את b להיות (i_1, j).

הערה 4. נזכר כי $H \lhd G$ אם ורק אם $g^{-1}Hg = H$ לכל $g \in G$. במקרה שבו $G = S_n$, נקבל שתת־חבורה $H \leq S_n$ היא נורמלית אם לכל $h \in H$ מתקיים כי כל ההצמדות $\sigma^{-1}h\sigma \in H$, כאשר $\sigma \in S_n$. אנו יודעים שלהצמדה $\sigma^{-1}h\sigma$ יש את אותו מבנה מחזורים כמו של h. כלומר כדי להוכיח כי H נורמלית, מספיק להוכיח שהיא מכילה את כל התמורות בעלות אותו מבנה מחזורים של איבריה.

תרגיל 5. לפי משפט לגראנז' סדר תת־חבורה מחלק את סדר החבורה. האם ההפך נכון? כלומר האם לכל מספר המחלק את סדר החבורה קיימת תת־חבורה מהסדר הזה?

פתרון. לא! נפריך זאת בעזרת הדוגמה של חבורת התמורות הזוגיות (חבורת החילופין) A_4, שלה אין תת־חבורה מסדר 6.

נניח בשלילה שקיימת $A_4 \leq H$ כך ש-$|H| = 6$. לכן $[A_4 : H] = \frac{12}{6} = 2$. לכן $H \lhd A_4$. לפי תרגיל שראינו לגבי תת־חבורות נורמליות מאינדקס סופי, לכל $\sigma \in A_4$ נקבל כי $\sigma^2 \in H$. יהי $\sigma \in A_4$ מחזור מאורך 3. אזי $\sigma^2 \in H$, וכמו כן $\sigma^2\sigma^2 = \sigma^4 = \sigma \in H$ (או לפי זה ש-$\sigma = \left(\sigma^2\right)^{-1}$). כל המחזורים מאורך 3 ב-S_4, שהם תמורות זוגיות, נמצאים ב-A_4. כעת ראינו שהם נמצאים גם ב-H. מספר המחזורים מאורך 3 ב-S_4 הוא $\binom{4}{3}(3-1)! = 8$. כלומר $|H| \geq 8$, וזו סתירה להנחה $|H| = 6$.

תרגיל 6. העזרו בהוכחת משפט קיילי על מנת לשכן את D_4 ב-S_8.

פתרון. נמספר את איברי D_4 כך:

$$D_4 = \left\{\mathrm{id}, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \tau\sigma^3\right\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

ברור כי id נשלח לתמורת הזהות. נראה לאיזו תמורה נשלח τ (ואת שאר האיברים תוכלו לנסות לבד בבית). לפי הוכחת המשפט $\tau \mapsto l_\tau$ כאשר $l_\tau(x) = \tau x$. כלומר כדי למצוא את התמורה אליה נשלח τ באופן מופרש נצטרך להפעיל את l_τ על כל אחד מאיברי D_4. נחשב:

$$\begin{aligned}
l_\tau(\mathrm{id}) &= \tau \cdot \mathrm{id} = \tau && \Rightarrow && 1 \mapsto 5\\
l_\tau(\sigma) &= \tau\sigma && \Rightarrow && 2 \mapsto 6\\
l_\tau(\sigma^2) &= \tau\sigma^2 && \Rightarrow && 3 \mapsto 7\\
l_\tau(\sigma^3) &= \tau\sigma^3 && \Rightarrow && 4 \mapsto 8\\
l_\tau(\tau) &= \mathrm{id} && \Rightarrow && 5 \mapsto 1\\
l_\tau(\tau\sigma) &= \sigma && \Rightarrow && 6 \mapsto 2\\
l_\tau(\tau\sigma^2) &= \sigma^2 && \Rightarrow && 7 \mapsto 3\\
l_\tau(\tau\sigma^3) &= \sigma^3 && \Rightarrow && 8 \mapsto 4
\end{aligned}$$

לסיכום $\tau \mapsto (15)(26)(37)(48)$. שימו לב שהמיספור של איברי D_4 היה שרירותי לחלוטין. בכל מקרה נקבל איבר מסדר 2 ב-S_8 (האם כל איבר מסדר 2 ב-S_8 יכול להיות התמונה של τ בשיכון שכזה? הוכיחו!). לבית: מצאו שיכון של D_n ב-S_n.

2 מכפלות ישרות למחצה

הגדרה 7. תהי G חבורה, ויהיו $K, Q \leq G$ תת־חבורות המקיימות $K \lhd G$, $K \cap Q = \{e\}$ ו-$G = KQ$. במקרה זה נאמר כי G היא מכפלה ישרה למחצה (פנימית) של K ב-Q. נסמן זאת $G = K \rtimes Q$, כאשר בסימון החלק הפתוח ב"פפיון" מכוון לתת־החבורה הנורמלית.

אם בנוסף $Q \lhd G$, אז נקבל כי G מכפלה ישרה (פנימית) של K ו-Q.

תרגיל 8. יהי F שדה. הוכיחו שחבורה המטריצות הבאה היא מכפלה ישרה למחצה:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \alpha \in F^*, a \in F \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in F \right\} \rtimes \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \alpha \in F^* \right\}$$

פתרון. נסמן את תת־החבורות ב-K, Q בהתאמה (כמו בהגדרה לעיל). אנחנו לא נוכיח שהן אכן תת־חבורות של G, אבל זה לא מאוד קשה. למי שמעוניין, גם קל לראות כי $K \cong F$ ו-$Q \cong F^*$. קל לראות כי $K \cap Q = \{e\}$.

נראה כי $K \lhd G$. נשים לב מי הוא ההופכי בחבורה G:

$$\begin{pmatrix} \alpha & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & -a\alpha^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ונחשב כי לכל $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in K$ מתקיים

$$\begin{pmatrix} \alpha & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha b + a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & -a\alpha^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K$$

ולכן K נורמלית. נותר להראות כי $G = KQ$. אפשר לראות זאת מהפירוק של כל איבר ב-G לצורה

$$\begin{pmatrix} \alpha & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

תרגיל 9. הראו ש-$\mathbb{Z}_6$ וגם S_3 הן מכפלה ישרה למחצה של (תת־חבורה האיזומורפית ל-) $\mathbb{Z}_3$ ב-(תת־חבורה האיזומורפית ל-) $\mathbb{Z}_2$. האם היא בהכרח מכפלה ישרה של תת־חבורות אלו?

פתרון. נתחיל עם $\mathbb{Z}_6$. קל לראות כי $\mathbb{Z}_6 = \{0,2,4\} \rtimes \{0,3\}$. הרי החיתוך הוא טריוויאלי, תת־החבורה $\langle 2 \rangle \cong \mathbb{Z}_3$ היא נורמלית וגם $\mathbb{Z}_6 = \{0,2,4\} + \{0,3\}$. זו מכפלה ישרה כי גם $\langle 3 \rangle$ נורמלית ב-$\mathbb{Z}_6$.

עבור S_3 אפשר לראות כי $S_3 = \langle (123) \rangle \rtimes \langle (12) \rangle$. כדי להראות כי S_3 אינה מכפלה ישרה של תת־החבורות האלו, אפשר לשים לב שאין לה תת־חבורה נורמלית מסדר 2 (אם חילוף נמצא בתת־חבורה נורמלית, אז גם שאר החילופים יהיו בה). למי ששכח, נזכיר כי $A_3 = \langle (123) \rangle \cong \mathbb{Z}_3$.

כהערת אגב, נאמר שאפשר להוכיח שכל חבורה מסדר 6 היא איזומורפית או ל-$\mathbb{Z}_6$ (אם היא אבלית), או ל-S_3 (אם היא לא אבלית).

3 הצמדה

הגדרה 10. תהי G חבורה. אומרים שאיברים g ו-h צמודים, אם קיים $a \in G$ שעבורו $h = aga^{-1}$. זה מגדיר יחס שקילות על G, ולמחלקת השקילות $\mathrm{conj}(x) = \{gxg^{-1} : g \in G\}$ של איבר x קוראים מחלקת הצמידות של x.

כמה תכונות של יחס ההצמדה:

1. תמיד מתקיים $x \in \mathrm{conj}(x)$, שהרי $x = exe^{-1}$ (ויחס שקילות הוא רפלקסיבי).
2. $x \in Z(G)$ אם ורק אם $\mathrm{conj}(x) = \{x\}$.
3. מהסעיף הקודם נסיק כי G אבלית אם ורק אם לכל $x \in G$ מתקיים $\mathrm{conj}(x) = \{x\}$. כלומר אין בחבורה שני איברים שונים צמודים.
4. מחלקות הצמידות אינן תת־חבורות, פרט למקרה של איבר היחידה (ואז נקבל תת־חבורה טריוויאלית).

תרגיל 11. תהי תמורה $\pi = (1234)(56)(78) \in S_8$. מצאו את מספר התמורות הצמודות ל-π.

פתרון. למעשה אנו נדרשים למצוא את $|\mathrm{conj}(\pi)|$. האיברים במחלקת הצמידות של π הם התמורות בעלות מבנה מחזורים כמו של π, והוא $(4,2,2)$. כמה תמורות כאלו יש? תחילה נבחר קבוצה של ארבעה מספרים מתוך 8 עבור המחזור הארוך, ואחר כך לסדרם במעגל. יש $\binom{8}{4}(4-1)!$ אפשרויות כאלו. אחר כך נבחר מספרים עבור החילוף הראשון מתוך ארבעת המספרים שנותרו, ויש $\binom{4}{2}$ אפשרויות כאלו. הבחירה עבור החילוף האחרון נקבעה לחלוטין. נשים לב כי לשני החילופים אותו מבנה מחזורים, ולכן אין משמעות לסדר בו בחרנו אותם, ולכן נחלק ב-2 בחישוב הסופי. קיבלנו לבסוף

$$|\mathrm{conj}(\pi)| = \frac{\binom{8}{4}3!\binom{4}{2}}{2} = 1260$$

תרגיל 12. יהיו $\sigma, \tau \in A_n$, ונניח של-σ ול-τ אותו מבנה מחזורים. האם σ ו-τ צמודות ב-A_n?

פתרון. לא! למשל, ניקח $n = 3$. אנחנו יודעים כי A_3 היא חבורה מגודל 3, ולכן היא ציקלית, ובפרט אבלית. לפי מה שראינו, נקבל כי כל איבר ב-A_3 צמוד רק לעצמו. בפרט, $(1,2,3),(1,3,2) \in A_3$ אינם צמודים ב-A_3. אבל הם צמודים ב-S_3, כי יש להם אותו מבנה מחזורים.

הגדרה 13. יהי $n \in \mathbb{N}$. נאמר כי סדרה לא עולה של מספרים טבעיים $(s_i)_{i=1}^r$ היא חלוקה של n אם $\sum_{i=1}^r s_i = n$. נסמן את מספר החלוקות של n ב-$\rho(n)$.

מסקנה 14. מספר מחלקות הצמידות ב-S_n הוא $\rho(n)$. רואים זאת לפי מספר מבני המחזורים האפשריים, כאשר כוללים מספרים שאינם משתנים בתמורה כמחזור מאורך 1.

תרגיל 15. כמה מחלקות צמידות יש ב-S_5?

פתרון. ניעזר במסקנה האחרונה, ונכתוב את 5 כסכומים של מספרים טבעיים:

$$
\begin{aligned}
5 &= 5 \\
5 &= 4+1 \\
5 &= 3+2 \\
5 &= 3+1+1 \\
5 &= 2+2+1 \\
5 &= 2+1+1+1 \\
5 &= 1+1+1+1+1
\end{aligned}
$$

ולכן $\rho(5)=7$.

תרגיל 16. מי הן מחלקות הצמידות ב-A_4?

פתרון. האיברים בחבורה זו הם מן הצורה $\{\mathrm{id},(ijk),(ij)(kl)\}$. יש את מחלקת הצמידות $\{\mathrm{id}\}$ של היחידה, שכוללת רק את תמורת הזהות.

נתבונן בתמורה $\sigma=(12)(34)$. בחבורה S_4 יש במחלקת הצמידות של σ גם את $(13)(24)$ ואת $(14)(23)$. נראה שתמורות אלו צמודות ל-σ גם ב-A_4. נחפש $\pi\in A_4$ כך שמתקיים

$$\pi\sigma\pi^{-1}=(\pi(1),\pi(2))(\pi(3),\pi(4))=(13)(24)$$

ואפשר לראות שאם נבחר $\pi=(132)\in A_4$ נקבל את הדרוש. באופן דומה קל לראות שהתמורה $\mu=(123)\in A_4$ מקיימת $\mu\sigma\mu^{-1}=(14)(23)$. לכן $|\mathrm{conj}(\sigma)|=3$ (ודאו שאתם מבינים למה אין איברים נוספים במחלקת הצמידות).

נותרנו עם 8 איברים שצריך "לחלק" למחלקות צמידות. בהרצאה ראיתם כי $|\mathrm{conj}(x)|\,|\,|G|$ לכל $x\in G$, ומפני ש-8 לא מחלק את $|A_4|=12$, אנו נצפה שתהינה לפחות עוד שתי מחלקות צמידות. בדיקה מפורשת תראה כי

$$
\begin{aligned}
\mathrm{conj}((123)) &= \{(123),(134),(142),(243)\} \\
\mathrm{conj}((132)) &= \{(132),(143),(124),(234)\}
\end{aligned}
$$

נשים לב שזהו פתרון נוסף לתרגיל 12, כי (123) ו-(132) אינם צמודים ב-A_4. התמורות האלו צמודות ב-S_4, כי יש להן את אותו מבנה מחזורים. אפשר להראות כי המחזורים האלו כן צמודים ב-A_5.

4 חבורות אבליות סופיות (לעתיד)

טענה 17. תהי G חבורה אבלית מסדר $p_1p_2\dots p_k$ (מכפלת ראשוניים שונים). אזי

$$G\cong \mathbb{Z}_{p_1}\times\mathbb{Z}_{p_2}\times\cdots\times\mathbb{Z}_{p_k}$$

למשל אם G אבלית מסדר 154, אז $G\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_7\times\mathbb{Z}_{11}$.

טענה 18. תהי G חבורה אבלית מסדר חזקה של ראשוני p^n. אזי קיימים מספרים טבעיים $m_1,\dots,m_k$ כך ש-$m_1+\cdots+m_k=n$ ומתקיים $G\cong\mathbb{Z}_{m_1}\times\mathbb{Z}_{m_2}\times\cdots\times\mathbb{Z}_{m_k}$.
למשל אם G אבלית מסדר $27=3^3$, אזי G איזומורפית לאחת מהחבורות הבאות:

$$\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3,\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_9,\mathbb{Z}_{27}$$

שקל לראות שהן לא איזומורפיות אחת לשניה (לפי סדרים של איברים למשל).

הגדרה 19. יהי $n\in\mathbb{N}$. נאמר כי סדרה לא עולה של מספרים טבעיים $(s_i)_{i=1}^r$ היא חלוקה של n אם $\sum_{i=1}^r s_i=n$. נסמן את מספר החלוקות של n ב-$\rho(n)$.
למשל $\rho(4)=5$, כי $4=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1=4$.

טענה 20. מספר החבורות האבליות, עד כדי איזומורפיזם, מסדר p^n הוא $\rho(n)$.

סיכום 21. כל חבורה אבלית מסדר $p_1^{k_1}\dots p_n^{k_n}$ איזומורפית למכפלה של חבורות אבליות $A_1\times\dots A_n$ כאשר A_i היא מסדר $p_i^{k_i}$. פירוק כזה נקרא פירוק פרימרי.
למשל, אם G חבורה אבלית כך ש-$|G|=45=3^2\cdot 5$, אז G איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_5$ או ל-$\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5$.

טענה 22. מספר החבורות האבליות, עד כדי איזומורפיזם, מסדר $p_1^{k_1}\dots p_n^{k_n}$ הוא $\rho(k_1)\dots\rho(k_n)$.
למשל, מספר החבורות האבליות מסדר $200=2^3\cdot 5^2$ הוא $6=3\cdot 2=\rho(3)\rho(2)$. האם אתם יכולים למצוא את כולן?

תרגיל 23. הוכיחו כי $\mathbb{Z}_{200}\times\mathbb{Z}_{20}\cong\mathbb{Z}_{100}\times\mathbb{Z}_{40}$.

פתרון. אפשרות אחת היא להביא את החבורות להצגה בצורה קנונית, ולראות שההצגות הן זהות. אפשרות אחרת היא להעזר בטענה (שראיתם בהרצאה) שאם $(n,m)=1$, אז $\mathbb{Z}_{nm}\cong\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_m$. לכן

$$\mathbb{Z}_{200}\times\mathbb{Z}_{20}\cong\mathbb{Z}_{25}\times\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_4\cong\mathbb{Z}_{25}\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_5\cong\mathbb{Z}_{100}\times\mathbb{Z}_{40}$$

הגדרה 24. תהי G חבורה. נגדיר את האקספוננט של החבורה $\exp(G)$ להיות המספר הטבעי הקטן ביותר n כך שלכל $g\in G$ מתקיים $g^n=e$. אם לא קיים כזה, נאמר $\exp(G)=\infty$.
קל לראות שהאקספוננט של G הוא הכפולה המשותפת המזערית (lcm) של סדרי האיברים שלה.

תרגיל 25. תנו דוגמא לחבורה לא ציקלית G עבורה $\exp(G) = |G|$.

פתרון. נבחר את $G = S_3$. אנחנו יודעים שיש בה איבר מסדר 1 (איבר היחידה), איברים מסדר 2 (החילופים) ואיברים מסדר 3 (מחזורים מאורך 3). לכן

$$\exp(S_3) = [1,2,3] = 6 = |S_3|$$

אם יש זמן הראו כי $\exp(S_n) = [1,2,\ldots,n]$.

תרגיל 26. הוכיחו שאם G חבורה אבלית סופית כך ש-$\exp(G) = |G|$, אז G ציקלית.

פתרון. נניח וישנו פירוק $\exp(G) = p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n} = |G|$. אנחנו יכולים לפרק את G לפירוק פרימרי $A_1 \times \cdots \times A_n$, כאשר $|A_i| = p_i^{k_i}$. אנחנו יודעים מהו הסדר של איברים במכפלה קרטזית (הכפולה המשותפת המזערית של הסדרים ברכיבים), ולכן הגורם $p_i^{k_i}$ באקספוננט מגיע רק מאיברים שבהם ברכיב A_i בפירוק הפרימרי יש איבר לא אפסי. האפשרות היחידה שזה יקרה היא אם ורק אם $A_i \cong \mathbb{Z}_{p_i^{k_i}}$ (אחרת האקספוננט יהיה קטן יותר). ברור כי $\left(p_i^{k_i}, p_j^{k_j}\right) = 1$ עבור $i \neq j$, ולכן נקבל כי

$$G \cong \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{k_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_n^{k_n}} \cong \mathbb{Z}_{|G|}$$

ולכן G היא ציקלית.