פתרון שאלה 3 בתרגיל 7

זה פתרון אפשרי לשאלה, לקוח מתרגול משנים קודמות:

הגדרה: אומרים שחלוקה Q היא עידון של החלוקה P, אם Q מתקבלת מ-P ע"י הוספת מספר סופי של נקודות.

1. תרגיל: תהיינה $P,P^* \mid [a,b]$ חלוקות ו-*P מעדנת את P. הוכיחו כי $v(f,P)\le v(f,P^*)$

פתרון: תחילה, נניח כי *P התקבלה מ-P ע"י הוספת נקודה אחת בלבד, *x הנמצאת בקטע $x_{r-1}<x^*<x_r$. אם כך:

$$v(f,P)=\left|f(x_1)-f(x_0)\right|+\left|f(x_2)-f(x_1)\right|+\ldots+\left|f(x_r)-f(x_{r-1})\right|+\ldots+\left|f(x_n)-f(x_{n-1})\right|$$

$$=\left|f(x_1)-f(x_0)\right|+\ldots+\left|f(x_r)-f(x^*)+f(x^*)-f(x_{r-1})\right|+\ldots+\left|f(x_n)-f(x_{n-1})\right|\le$$

$$\le\left|f(x_1)-f(x_0)\right|+\ldots+\left|f(x_r)-f(x^*)\right|+\left|f(x^*)-f(x_{r-1})\right|+\ldots+\left|f(x_n)-f(x_{n-1})\right|=v(f,P^*)$$

ואם *P התקבלה ע"י הוספת N נקודות, חוזרים על ההוכחה שלעיל N פעמים.

2. תרגיל: תהי $P:a=x_0<x_1<\ldots x_n=b$ חלוקה, הוכיחו כי $T_a^b[f]=\sum_{k=1}^{n}T_{x_{k-1}}^{x_k}[f]$

פתרון: נניח כי מדובר על חלוקה בת שני קטעים (אחרת, כמו מקודם אפשר לחזור על ההוכחה) $P:a=x_0<x_1=c<x_2=b$ ויש להראות $T_a^b[f]=T_a^c[f]+T_c^b[f]$.

$\le$: תהי $P\mid[a,b]$, נעדן את P ע"י הוספת הנקודה c (אם אינה נמצאת):

$$v(f,P)\le v(f,P\cup\{c\})=\left|f(x_1)-f(x_0)\right|+\left|f(x_2)-f(x_1)\right|+\ldots\left|f(c)-f(x_{m-1})\right|$$

$$+\left|f(x_{m+1})-f(c)\right|+\ldots\left|f(x_n)-f(x_{n-1})\right|\le\sup\left\{v(f,P):P\mid[a,c]\right\}+\sup\left\{v(f,P):P\mid[c,b]\right\}$$

הראינו כי כל איברי הקבוצה $\left\{v(f,P):P\mid[a,b]\right\}$ חסומים מלעיל ע"י $T_a^c[f]+T_c^b[f]$ ולכן גם הsup שלה מקיים $\sup\left\{v(f,P):P\mid[a,b]\right\}\le T_a^c[f]+T_c^b[f]$ וזה הא"ש המבוקש.

$\ge$: יהי $\varepsilon>0$, ע"פ האפיון של sup יש חלוקות $P_1\mid[a,c],P_2\mid[c,b]$ המקיימות $v(f,P_1)\ge T_a^c[f]-\varepsilon/2$, $v(f,P_2)\ge T_c^b[f]-\varepsilon/2$. נחבר את הא"ש לקבל $v(f,P_1)+v(f,P_2)\ge T_a^c[f]+T_c^b[f]-\varepsilon$. $P_1\cup P_2$ היא חלוקה של $[a,b]$ וקל לראות כי $v(f,P_1\cup P_2)=v(f,P_1)+v(f,P_2)$. ז"א $\sup\left\{v(f,P):P\mid[a,b]\right\}\ge v(f,P_1\cup P_2)\ge T_a^c[f]+T_c^b[f]-\varepsilon$. נשאיף $\varepsilon\to 0$ לקבל התוצאה.