מתמטיקה בדידה הרצאה 13 תשפא ־ פונקציות

27 ביולי 2021

1. הגדרה: תהיינה A,B קבוצות, פונקציה מ־A ל־B זו שלשה סדורה (f,A,B) כאשר $f\subseteq A\times B$ יחס מ־A ל־B המקיים:

   (א) שלמות (משמאל):

   $$\forall a\in A,\exists b\in B:(a,b)\in f$$

   (ב) חד ערכיות:

   $$\forall a\in A,\forall b_1,b_2\in B:((a,b_1)\in f\wedge(a,b_2)\in f)\Rightarrow(b_1=b_2)$$

   במילים אחרות: לכל $a\in A$ קיים לכל היותר $b\in B$ אחד המקיים $(a,b)\in f$.

2. באופן שקול:

   $$\forall a\in A,\exists!b\in B:(a,b)\in f$$

   במילים: לכל איבר $a\in A$ קיים $b\in B$ יחיד כך ש־ $(a,b)\in f$.

3. סימונים ומינוחים:

   (א) אם $(a,b)\in f$ נסמן גם $f(a)=b$. בנוסף נסמן $a\overset{f}{\mapsto}b$, ונאמר a נשלח/ממופה ל־b. a נקרא המקור של b, b נקרא התמונה של a.

   (ב) הקבוצה A נקראת התחום של הפונקציה f.

   (ג) הקבוצה B נקראת הטווח של הפונקציה f.

   (ד) במקום לרשום את השלשה (f,A,B) ניתן לרשום $f:A\to B$.

4. שיוויון פונקציות: פונקציות $(f,A,B),(g,C,D)$ שוות, כאשר

   $$(A=C)\wedge(B=D)\wedge(\forall a\in A:f(a)=g(a))$$

   במילים: התחום והטווח שווה, והאיברים נשלחים בדיוק לאותם איברים.

5. דוגמאות:

(א) $A=\{1,2,4\}, B=\{1,3,5\}, f=\{(1,1),(2,3),(4,3)\}$. זו פונקציה, ונוכל לרשום:

$$f(1)=1, f(2)=3, f(4)=3$$

(ב) $A=\{1,1,2,4\}=\{1,2,4\}, B=\{1,3,5\}, f=\{(1,1),(2,3),(4,3),(1,3)\}$. השלשה הזו איננה פונקציה, מכיון ש־ f לא חד־ערכית.

(ג) $A=\{1,2,4\}, B=\{1,3,5\}, f=\{(1,1),(3,2),(5,4)\}$, אז השלשה (f,B,A) היא פונקציה מ־B ל־A. כאן נרשום $f:B\to A$.

(ד) $A=\{1,2,4\}, B=\{1,3,5\}, f=\{(1,1)\}$, במקרה זה השלשה (f,A,B) איננה פונקציה כי f יחס שאיננו שלם (משמאל).

(ה) אם $A=\emptyset$, אז לכל קבוצה B יש פונקציה יחידה $f:A\to B$ הלא היא הפונקציה הריקה $f=\emptyset$. $(\emptyset,\emptyset,B)$ היא הפונקציה הריקה מהקבוצה הריקה לאיזשהי קבוצה.

(ו) אם $A\neq\emptyset, B=\emptyset$, אז לא קיימת פונקציה $f:A\to B$.

(ז) נגדיר פונקציה $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}\cup\{0\}$ ע"י הכלל:

$$\forall a\in\mathbb{Z}: f(a)=a^2$$

למשל

$$0\mapsto 0$$

$$f(1)=f(-1)=1$$

האם ל־ $5\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ יש מקור? לא! הוא לא ריבוע של מספר שלם.

(ח) נגדיר פונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י

$$g(x)=x^2$$

גם כאן

$$0\mapsto 0, g(1)=g(-1)=1$$

בפונקציה זו, ל־$5\in\mathbb{R}$ יש מקור, $g(\sqrt{5})=5$.
גם בפונקציה זו, לא לכל $y\in\mathbb{R}$ יש מקור, למשל ל־$-1\in\mathbb{R}$ אין מקור.

(ט) הערה: שימו לב ששתי הפונקציות בדוגמות האחרונות אינן שוות, למרות שיש להן את אותו הכלל. זה מכיוון שהתחום והטווח שונים.

(י) לגבי הפונקציה $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ המוגדרת ע"י הכלל $f(z) = z^2$, כאן לכל איבר יש מקור.

(יא) לכל קבוצה A, יחס הזהות I_A הוא פונקציה $I_A : A \to A$. קוראים לה פונקציית הזהות. למשל

$$I_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, I_{\mathbb{N}}(n) = n$$

$$I_{\{1\}} : \{1\} \to \{1\} = \{(1,1)\}$$

(יב) פונקציית הערך השלם: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ המוגדרת ע"י:

$$f(x) = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\} = \lfloor x \rfloor$$

למשל

$$f(\pi) = 3, f(0) = f(0.5) = \lfloor 0.9 \rfloor = 0$$

כאן, לכל $n \in \mathbb{Z}$ יש מקור, כי $f(n) = n$.

(יג) ניתן להגדיר פונקציה בצורה מפוצלת. למשל להגדיר $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(n) = \begin{cases} n-1 & n > 1 \\ 5 & n = 1 \end{cases}$$

כאן

$$f(6) = f(1) = 5$$

6. הגדרת תמונה: תהי $f : X \to Y$ פונקציה. התמונה של f מוגדרת להיות:

$$Im(f) = \{y \in Y \mid \exists x \in X, f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in X\}$$

במילים: קבוצת כל האיברים שיש להם מקור (שקול: קבוצת כל האיברים שהם תמונה של איבר כלשהו).

7. הגדרות: תהי $f : X \to Y$ פונקצייה.

(א) הפונקצייה תיקרא חד־חד ערכית (חח"ע) אם מתקיים:

$$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

באופן שקול:

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

(ב) הפונקצייה תיקרא "על" אם מתקיים:

$$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$$

באופן שקול:

$$Im(f) = Y$$

8. דוגמות:

(א) פונקציית הערך השלם: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ המוגדרת ע"י:

$$f(x) = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\} = \lfloor x \rfloor$$

ראינו שהיא על, כי לכל $n \in \mathbb{Z}$ יש מקור: $f(n) = n$, או במילים אחרות $Im(f) = \mathbb{Z}$

היא לא חח"ע כי למשל $f(0) = f(0.5) = 0$.

(ב) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ המוגדרת ע"י $f(n) = n + 1$.

היא חח"ע: אם $f(n) = f(m)$ זאת אומרת $n + 1 = m + 1$ וזה בדיוק אומר $n = m$.

היא לא על, כי ל־1 אין מקור.

$Im(f) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

(ג) נגדיר פונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ע"י $f(x) = mx + b$

i. אם $m \neq 0$ אז הפונקציה חח"ע:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow mx_1 + b = mx_2 + b \Rightarrow x_1 = x_2$$

בנוסף היא על: לכל $y \in \mathbb{R}$ יש מקור: רוצים למצוא x כך ש־ $mx + b = y$ נבחר את

$$x = \frac{y - b}{m}$$

ii. אם $m = 0$ אז היא לא חח"ע:

$$f(1) = f(500) = b$$

והיא גם לא על, לכל $y \neq b$ אין מקור.

הערה: במקרה זה שבו $m = 0$ פונקצייה זו נקראת הפונקצייה הקבועה b.

כלומר:

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = b$$

$$Im(f) = \{b\}$$