תרגילי חזרה במבנים דיסקרטיים

שאלה 1

א. הראו כי $(\mathbb{Z}_4,+)$ איזומורפית ל-$(U_{10},\cdot)$.

ב. הראו כי $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3,+)$ איזומורפית ל-$(\mathbb{Z}_6,+)$.

שאלה 2

תהי $(G,\cdot)$ חבורה כך ש-$g^2=e$ לכל $g\in G$. הוכיחו כי G אבלית.

שאלה 3

תהי G חבורה. נגדיר $\Delta_G=\{(g,g)|g\in G\}$.

א. הראו כי Δ_G תת חבורה של $G\times G$. (הכפל ב-$G\times G$ הוא כפל איבר-איבר).

ב. הראו כי $\Delta_G\trianglelefteq G$ אם ורק אם G אבלית.

שאלה 4 (משפט השאריות הסיני)

יהיו $n,m\in\mathbb{N}$ מספרים זרים (כלומר $\gcd(n,m)=1$) נגדיר $f:\mathbb{Z}_{nm}\to\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_m$ ע"י:

$f(x)=(x\,\%\,n,x\,\%\,m)$

א. הוכיחו כי f הומומורפיזם חבורות (הפעולה על $\mathbb{Z}_{nm}$ ו-$\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_m$ היא חיבור).

ב. הוכיחו כי $\ker f=\{0\}$. הסיקו כי f איזומורפיזם חבורות וכי $\mathbb{Z}_{nm}=\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_m$.

ג. הראו כי $\mathbb{Z}_9\ncong\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$. מדוע אין סתירה עם סעיף ב?

שאלה 5

יהי $(M,\cdot)$ מונויד סופי בו מתקיים צמצום משמאל, כלומר לכל $x,y,z\in M$: אם $xy=xz$ אז $y=z$.
הוכיחו כי $(M,\cdot)$ חבורה. [רמז: יהי $a\in M$. התבוננו בסדרה $a,a^2,a^3,\dots$.]

שאלה 6

יהי $(R,+,\cdot)$ חוג ויהי $a\in R$.

א. הראו כי $(aRa,+,\cdot)$ גם חוג.

ב. הוכיחו או הפריכו: אם ל-R יש יחידה, אז גם ל-aRa יש יחידה.

שאלה 7

הראו כי $\mathbb{Z}_n$ הוא שדה אם ורק אם n ראשוני. [רמז: משפט אוקלידס.]

שאלה 8

יהי F שדה, יהי $f(x)\in F[x]$ פולינום ויהי $a\in F$.

א. הוכיחו כי $(x-a)\mid(x^n-a^n)$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

ב. הראו כי אם $f(a)=0$ אז $(x-a)|\,f(x)$. [רמז: $f(x)=f(x)-f(a)$. כעת העזרו בסעיף א.]

שאלה 9

א. מצאו שני מספרים $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ כך ש-$111\alpha+99\beta=12$. [רמז: $\gcd(111,99)$ מחלק את 12.]

ב. האם קיימים שני מספרים $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ כך ש-$111\alpha+99\beta=13$?

שאלה 10

א. האם 19 הפיך ב-$\mathbb{Z}_{45}$? אם כן, מה ההופכי שלו?

ב. האם 21 הפיך ב-$\mathbb{Z}_{45}$? אם כן, מה ההופכי שלו?

שאלה 11

א. מצאו פולינומים $a(x),b(x)\in\mathbb{R}[x]$ כך ש-
$a(x)(x^2+x+1)+b(x)(2x^2+5x)=1$.

ב. מצאו פולינומים $a(x),b(x)\in\mathbb{Z}_3[x]$ כך ש-
$a(x)(x^3+2x+1)+b(x)(x^3+2x^2+1)=1$

שאלה 12

א. חשבו את ההופכי של $\overline{x+1}$ ב-$\mathbb{R}[x]/\langle x^3+2x^2+2\rangle$.

ב. חשבו את ההופכי של $\overline{x+2}$ ב-$\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3+2x^2+2\rangle$.

שאלה 13

יהי $\Sigma=\{a,b\}$. בנו אוטומט סופי <u>דטרמיניסטי</u> המקבל את השפות הבאות. הסבירו בקצרה מדוע האוטומט שבניתם אכן מקבל את השפה.

א. $L_1=\{a^2b^2\}^*$

ב. $L_2=\{ab^n|n\in\mathbb{N}\}$

ג. $L_3=L_1\cup L_2$.

ד. $L_4=L_2^*$ (שפת כל המילים שניתן להרכיב ע"י שרשור מילים ב-L_2).

שאלה 14

בנו אוטומטים לא דטרמינסטיים עם מסעי ϵ עבור השפות הבאות (האלף-בית הוא $\Sigma=\{a,b\}$):

א. $L_1=\{ba,baa\}^*$

ב. $L_2=\{ab^na|n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}\cup\{(ab)^n|n\in\mathbb{N}\}$

שאלה 15

הוכיחו כי השפות הבאות אינן רגולריות (האלף-בית הוא $\Sigma=\{a,b\}$):

א. $L_1=\{a^nb^m|\,n,m\in\mathbb{N},m<n\}$

ב. $L_2 = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$
ג. $L_3 = \{a^n b^n a^n | n \in \mathbb{N}\}$

שאלה 16

הראו כי אם השפה L רגולרית (כלומר קיים אוטומט שמקבל אותה) אז גם השפות הבאות רגולריות:

א. $\{xay | x, y \in L\}$
ב. שפת כל המילים מהצורה $w_1 a w_2 a w_3 a \dots w_n a$ כאשר $w_1, \dots, w_n \in L$.

שאלה 17

בנו אוטומט סופי (לאו דווקא דטרמיניסטי) המקבל את השפה $L = \{aa, bab\}^*$ (מעל האלף בית $\Sigma = \{a,b\}$) והוכיחו פורמלית כי הוא אכן מקבל את L.