

(מזדקן התעשימות המסחריות)
 נבחן שימצאו ברשימתו חומרי
 עזר אסורים או יתפסו בחשופה
 יענש בתומרה עד כדי הרחקתו
 מהאניברסיטה

שאלון בחינה בקורס התמרות אינטגרליות (88-315-01)
 מרצה: פרופ' מ. אגרנובסקי
 סמסטר א', מועד א' (כ"ב ניסן תשס"ח, 27 אפריל 2008)
 משך הבחינה: 150 דקות

עליכם לענות על 5 שאלות מתוך 6 :

1. (א) נתונה פונקציה $g(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$. מה התנאי ההכרחי ל- g כך שקיימת $f \in L^1(\mathbb{R})$ עם $g = \hat{f}$?

(ב) איזה פונקציות מתוך הפונקציות הבאות הן לא התמרות פורייה של פונקציות מ- $L^1(\mathbb{R})$?

$$g(\lambda) = \frac{\lambda^4}{1+\lambda^4} \quad (3) \quad g(\lambda) = \frac{\arctan \lambda}{4+\lambda^2} \quad (2) \quad g(\lambda) = \frac{\sin \lambda^2}{\lambda^3} \quad (1)$$

2. תהי $\gamma(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. חשב $\hat{\gamma}(\lambda)$.

3. (א) פתור המשוואה לגבי $f \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{a^2 + (x-t)^2} dt = \frac{1}{b^2 + x^2}$$

(ב) מה התנאים ל- a, b כך שהפיתרון קיים?

4. מצא פונקציה $f \in L^1(\mathbb{R})$ כך ש- $xf', xf, x^2 f, f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$

ומתקיימת המשוואה $f''(x) + 2f(x) + 2xf'(x) = 0, x \in \mathbb{R}$.

$$5. \text{ מצא } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

6. פתור את המשוואה

$$y''(t) - y'(t) - 6y(t) = 0, t > 0$$

$$y(0) = 1, y'(0) = -1$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{a}\right\}, \quad a > 0$$

$$e^{-st} f(at) dt.$$

$$\int_0^\infty e^{-(\frac{s}{a})x} f(x) dx = \frac{1}{a} \mathcal{L}\{f\}\left(\frac{s}{a}\right).$$

simple but useful. We can, for example, apply Examples 4.1, 4.2, 4.4, and 4.5.

The Laplace transform of $f(t) = t^n, n \in \mathbb{Z}_+,$ by

$$= (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

$$= \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$s > 0.$$

Before using Example 4.1 and (4.2) we

$$= f^{(n-1)}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

$$= f^{(n-1)}(0) = 0.$$

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s)$$

$$s > 0.$$

Table of Laplace Transforms

	Function	Laplace Transform
1	1	$\frac{1}{s}, s > 0$
2	$e^{at}, a \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{s-a}, s > a$
3	$e^{zt}, z \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{s-z}, s > \text{Re}(z)$
4	$\sin at, a \in \mathbb{R}$	$\frac{a}{s^2+a^2}, s > 0$
5	$\cos at, a \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+a^2}, s > 0$
6	$t^n, n \in \mathbb{Z}_+$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0$
7	$e^{at} \sin bt, a, b \in \mathbb{R}$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, s > a$
8	$e^{at} \cos bt, a, b \in \mathbb{R}$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, s > a$
9	$u_c(t), c > 0$	$\frac{e^{-cs}}{s}, s > 0$
10	$t^n e^{at}, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}_+$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, s > a$
11	$f'(t)$	$s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0)$
12	$f^{(n)}(t)$	$s^n \mathcal{L}\{f\}(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
13	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}\{f\}(s)$
14	$e^{at} f(t), a \in \mathbb{R}$	$\mathcal{L}\{f\}(s-a)$
15	$f(at), a > 0$	$\frac{1}{a} \mathcal{L}\{f\}\left(\frac{s}{a}\right)$