תרגיל בית 11 אינפי 1 למדמ"ח

1. נסחו את הטענה הבאה: הגבול $\lim_{x\to c} f(x)$ לא קיים:

(א) במונחי איניפיניטיסימלים.

(ב) במונחי ϵ, δ.

פתרון:

(א) לכל $L\in\mathbb{R}$ קיים $x\approx c$ $x\neq c$ עבורו $f(x)\not\approx L$.

(ב) קיים $\epsilon>0$ כך שלכל $\delta>0$ קיים x המקיים $0<|x-c|<\delta$ עבורו $|f(x)-L|\geq 0$.

2. לפניכם מספר טענות במונחי ϵ, δ.

(א) לכל $A>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $c-\delta<x<c$ מתקיים $f(x)>A$.

(ב) קיים $A>0$ כך שלכל $B<0$ קיים $x<B$ עבורו מתקיים $f(x)\leq A$.

(ג) קיים $\epsilon>0$ כך שלכל $\delta>0$ קיימים $x,y\in I$ המקיימים $|x-y|<\delta$ וגם $|f(x)-f(y)|\geq\epsilon$.

עבור כל אחת מהטענות:

i. נסחו אותה במונחי אינפיניטיסימלים.

ii. כתבו מה המשמעות: (למשל: הגבול הימני $\lim_{x\to c^+} f(x)$ לא קיים, הפונקציה רציפה בנקודה c וכדומה).

פתרון:

(א) לכל ϵ אינפיניטיסימל שלילי, $f(c+\epsilon)$ הוא מספר אינסופי חיובי.
משמעות: $\lim_{x\to c^-} f(x)=\infty$.

(ב) קיים H אינסופי שלילי כך ש $f(H)$ אינו אינסופי חיובי
משמעות: $\lim_{x\to -\infty} f(x)\neq\infty$

(ג) קיימים $x,y\in I^*$ כך ש $x\approx y$ אבל $f(x)\not\approx f(y)$
משמעות: הפונקציה x לא רציפה במ"ש בקטע I.

3. הוכיחו בשפה של ϵ, δ כי אם

$$\lim_{x\to c} f(x)=A$$

ו

$$\lim_{x\to c} g(x)=B$$

אז

$$\lim_{x\to c}(f(x)+g(x))=A+B$$

פתרון: יהי $\epsilon > 0$. צריך למצוא $\delta > 0$ כך ש $0 < |x-c| < \delta$ יגרור ש $|f(x)+g(x)-A-B| < \epsilon$. היות ש $\lim_{x\to c} f(x) = A$ אז קיים $\delta_1 > 0$ כך שלכל x המקיים

$$0 < |x-c| < \delta_1$$

מתקיים

$$|f(x)-A| < \frac{\epsilon}{2}$$

בדומה, קיים $\delta_2 > 0$ כך שלכל x המקיים

$$0 < |x-c| < \delta_2$$

מתקיים

$$|g(x)-B| < \frac{\epsilon}{2}$$

אם ניקח $\delta < \delta_1, \delta_2$ אז יתקיים שלכל x המקיים

$$|x-c| < \delta$$

מתקיים

$$|f(x)+g(x)-A-B| \le |f(x)-A| + |g(x)-B| \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

כנדרש.

4. בדקו אם הפונקציות הבאות רציפות במ"ש בתחום הנתון:

(א) $f(x) = e^x$ בכל $\mathbb{R}$.

פתרון: לא רציף במ"ש. ניקח $x = \ln H$ ו $y = \ln(H+1)$. ראשית נשים לב ש

$$y - x = \ln(H+1) - \ln H = \ln\frac{H+1}{H} = \ln(1+\frac{1}{H})$$

היות ש $1 + \frac{1}{H} \approx 1$ מתקיים ש $\ln(1+\frac{1}{H}) \approx 0$ ולכן באמת $y \approx x$. כעת, נשים לב ש:

$$f(x) = H$$

$$g(x) = H+1$$

וכמובן ש

$$f(x) \not\approx g(x)$$

לכן הפונקציה לא רציפה במ"ש

(ב) $f(x)=\cos x^2$ ב $[1,\infty)$.
פתרון: לא רציף במ"ש. נניח ש H הוא היפרשלם. נבחר $x=\sqrt{2\pi H}$ ו $y=\sqrt{2\pi H+\frac{\pi}{2}}$. ראשית נבדוק:

$$y-x=\sqrt{2\pi H+\frac{\pi}{2}}-\sqrt{2\pi H}=\sqrt{2\pi H+\frac{\pi}{2}}-\sqrt{2\pi H}\frac{\sqrt{2\pi H+\frac{\pi}{2}}+\sqrt{2\pi H}}{\sqrt{2\pi H+\frac{\pi}{2}}+\sqrt{2\pi H}}$$
$$=\frac{2\pi H+\frac{\pi}{2}-2\pi H}{\sqrt{2\pi H+\frac{\pi}{2}}+\sqrt{2\pi H}}=\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2\pi H+\frac{\pi}{2}}+\sqrt{2\pi H}}\approx 0$$

כלומר אכן, $x\approx y$. כעת נשים לב ש

$$\cos x^2=\cos 2\pi H=1$$

$$\cos y^2=\cos(2\pi H+\frac{\pi}{2})=0$$

כלומר

$$\cos x^2\not\approx\cos y^2$$

(ג) $f(x)=\ln x$ ב $(0,1)$
פתרון: לא רציף במ"ש. נבחר $x=e^{-H}$ ו $y=e^{-H-1}$. נשים לב ש x,y אינפיניטיסימלים ולכן כמובן ש

$$x\approx y$$

אבל

$$f(x)=-H$$

$$f(y)=-H-1$$

ולכן

$$f(x)\not\approx f(y)$$

(ד) $f(x)=x^{\sqrt{2}}$ בקטע $(0,\infty)$. רמז:הפריכו. השתמשו בכך שהרכבה של פונקציות רציפות במ"ש היא רציפה במ"ש.
פתרון: נניח בשלילה ש $f(x)$ רציפה במ"ש בקטע $(0,\infty)$. אז גם

$$f(f(x))$$

רציפה במ"ש.
אבל

$$f(f(x))=x^2$$

וידוע ש x^2 לא רציפה במ"ש ב $(0,\infty)$ בסתירה.

5. הוכיחו כי אם $f(x), g(x)$ רציפות במ"ש בקטע I אז גם $f(x)+g(x)$ רציפה במ"ש ב I. ניתן להשתמש באינפיניטיסימלים או ϵ, δ.

פתרון: יהי $\epsilon > 0$. צריך למצוא $\delta > 0$ כך שלכל $x, y \in I$ שמקיימים

$$|x-y| < \delta$$

יתקיים גם

$$|f(x)+g(x)-(f(y)+g(y))| < \epsilon$$

היות ש f רציפה במ"ש, יש δ_1 המקיימת כי אם $|x-y| < \delta_1$ אז $|f(x)-f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$.
היות ש g רציפה במ"ש, יש δ_2 המקיימת כי אם $|x-y| < \delta_2$ אז $|g(x)-g(y)| < \frac{\epsilon}{2}$.
נבחר $\delta < \delta_1, \delta_2$. אז אם $|x-y| < \delta$ מתקיים ש

$$|f(x)+g(x)-(f(y)+g(y))| = |f(x)-f(y)+g(x)-g(y)| <$$
$$\leq |f(x)-f(y)| + |g(x)-g(y)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

כנדרש.

6. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim\limits_{x\to\infty} \arccos\frac{1}{x}$

פתרון: אם $x \to \infty$ אז $\frac{1}{x} \to 0$. $\arccos$ רציפה ב 0 וגבולה $\frac{\pi}{2}$. כלומר

$$\lim_{x\to\infty} \arccos\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

(ב) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arccos x - \frac{\pi}{2}}{x}$

פתרון: נשתמש בלופיטל

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arccos x - \frac{\pi}{2}}{x} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = -1$$

(ג) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\arcsin\frac{1}{x}}$

פתרון: נשתמש בלופיטל

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\arcsin\frac{1}{x}} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\cdot(-\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} -\frac{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{1+x^2} = -1$$