01.08.11

אינפי 4 - תרגול 1

/~osharog

תרגיל: למצוא זווית בין וקטורים $\vec{a}$, $\vec{b}$ אם ידוע כי $|b|=2,\ |a|=1$

$(a-b)^2+(a-2b)^2=28$

$a^2-2ab+b^2+a^2-4ab+4b^2=28$

$1-6ab+4+1+16=28$

$ab=-1=|a|\cdot|b|\cdot\cos\alpha$

$\cos\alpha=-\frac{1}{2}$

$\alpha=\frac{2\pi}{3}$

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=|a|\cdot|b|\cdot\sin\hat{ab}\cdot\hat{n}$$

$\hat{n}$ מאונך לשניהם, מנורמל, לפי כלל יד ימין

תרגיל: מצא וקטור x אם ידוע $x\perp a,\ x\perp b$

$a=(2,-3,1)\quad b=(1,-2,3)$

$x\cdot(i+2j-7k)=10$

פתרון: $x=\lambda\cdot a\times b$

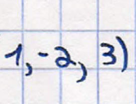
$$x=\lambda\cdot\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=\lambda(-7,-5,-1)$$

$-\lambda(7,5,-1)(1,+2,-7)=10$

$\Downarrow$

$\lambda=-1$

$x=(7,5,1)$



שטח המקבילית $=|a\times b|$

האם אפשר לחשב שטח המקבילית ע"י מכפלה סקלרית?

- צריך לסובב את a ב $\frac{\pi}{2}$ כך ש $\alpha'=\alpha-\frac{\pi}{2}$
- $a'=(-a_2,a_1)$

$$(b_1\ \ b_2)\begin{pmatrix}-a_2\\ a_1\end{pmatrix}=a_1b_2-a_2b_1=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

דטרמיננטה במרחב:

$$\det(A,B,C)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

נפח של מקבילון שצלעותיו פרושים ע"י הווקטורים A,B,C שווה:

$$\vec{A}\cdot\hat{n}\cdot(\bar{B}\times\bar{C})=nA\begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

דטרמיננטה:

תכונות:

1. מולטי לינאריות- $\det(a_1,\dots,a_{i-1},\alpha u+\beta w,a_{i+1},\dots,a_n)=$
$=\alpha\det(a_1,\dots,a_{i-1},u,a_{i+1},\dots,a_n)+\beta\det(a_1,\dots,a_{i-1},w,a_{i+1},\dots,a_n)$

2. אנטי סימטריות- אם מחליפים שתי שורות/עמודות, נקבל אותה דטרמיננטה בהיפוך סימן.

3. נורמלי- $\det(I)=1$

משפט: ① $A,B\in M^{n\times n}$ אז $\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B$

② מטריצה A הפיכה $\iff$ $\det A\neq 0$

③ $\det(A)=\det(A^t)$

④ אם A מטריצה משולשית אז הדטרמיננטה היא מכפלת איברי האלכסון.

משפט קושי-בינה: $A\in M^{m\times n}$ $B\in M^{n\times m}$. נסמן $[n]=\{1,\dots,n\}$ ו $\binom{[n]}{m}$ קבוצת תת קבוצות בגודל m. כאשר $S\in\binom{[n]}{m}$, נסמן ב $A_{[m],S}$ את המטריצה $m\times m$ שעמודותיה הן עמודות של המטריצה A באינדקסים S. $B_{S,[m]}$ אותו דבר עם שורות.

$$\det(A\cdot B)=\sum_{S\in\binom{[n]}{m}}\det A_{[m],S}\cdot\det B_{S,[m]}$$

דוגמה:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A\cdot B)=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-28$$

מקרים מיוחדים:

- אם $n=m$ אז $S=\binom{[n]}{n}=\{[n]\}$ ואז $\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B$
- אם $n<m$ אז $S=\binom{[n]}{m}$ היא קבוצה ריקה ואז $\det(A\cdot B)=0$.

משמעות גיאומטרית: הכללה של משפט פיתגורס

אם $A\in M^{m\times n}$ אז $\sqrt{\det(A\cdot A^t)}$ שווה לנפח m מימדי של מקבילון שנפרש ב$\mathbb{R}^n$ על ידי m שורות של A.

משפט קושי בינה מגדיר שנפח זה שווה לסכום ריבועי הנפחים של ההטלים אורתוגונלים של המקבילון על המישורים הm מימדיים (יש $\binom{n}{m}$ כאלה).

- אם $m=1$ הנפח של המקבילון הוא אורך הוקטור.

דוגמה: מצא שטח המקבילון ב$\mathbb{R}^4$ שצלעותיו: $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}\qquad A^t=\begin{pmatrix}+1&-1\\1&1\\1&1\\+1&-1\end{pmatrix}$$

$$\det(AA^t)=\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1&1\\-1&-1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}^2=16$$

נפח n מימדי- χ_A פונקציה אופיינית של A. כשχ_A אינטגרבילית אז הנפח הn מימדי מוגדר $\mathrm{Vol}_n(A)=\int_{\mathbb{R}^n}\chi_A d^nx$.

משפט: יהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ העתקה לינארית הנתונה ע"י $[T]$. אזי כל קבוצה A בעלת נפח מוגדר היטב. התמונה של $T(A)$ גם היא בעלת נפח מוגדר היטב.

$\mathrm{Vol}(T(A))=|\det(T)|\cdot\mathrm{Vol}_n(A)$

משפט: החלפה לינארית של משתנים

יהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ העתקה לינארית הפיכה ויהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית

$\Longleftarrow$ $f\circ T$ גם אינטגרבילית. $\int_{\mathbb{R}^n}f(y)d^ny=\det(T)\cdot\int_{\mathbb{R}^n}f(T(x))d^nx$

תרגיל: העתקה $T=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$ מעתיקה את מעגל היחידה לאליפסה.

$x^2+y^2=1\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$S_{ellipse}=\int_{ellipse}d^2y=\left|\det\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\right|\cdot\int_{circle}d^2x=ab\cdot\pi=\pi|ab|$$

תרגיל: א. מה הנפח של הטטרהדר שקודקודיו $T_1 \quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

ב. $T_2 \quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-2\\5\\2\end{pmatrix}$

ג. מטריצת העתקה: $\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ 1 & 3 & 5\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ מעתיקה את T_1 לT_2.

$$Vol_2(T_2) = det(S) \cdot Vol_2(T_1) = 33 \cdot Vol(T_1)$$

א. $$Vol(T_1) = \int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^{1-z-y} dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^{1-z}(1-z-y)\,dy\,dz = \int_0^1 \left((1-z)y - \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^{1-z} dz =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}(1-z)^2\,dz = \frac{1}{6}(z-1)^3\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$Vol(T_2) = 5.5$$