מבוא לפיסיקה מודרנית – תרגול II

איינשטיין ב1905 מבסס את תורת היחסות על כך שמהירות האור קבועה בכל מערכת.

הנחות היסוד של תורת היחסות הפרטית של איינשטיין :

1. עיקרון היחסות- חוקי הפיסיקה זהים (אינווריאנטים) בכל מערכת הייחסו האינרציאליות
   אם יש לנו מערכת של $x = f(x', t' \cdot v)$ אזי קיימת דרך $x' = f'\big(x, t(-v)\big)$
2. מהירות האור בוואקום קבועה בכל מערכות הייחוס.

כעת אנחנו מנסים ל"תקן" את טרנספורמציית גליליי. נרשום את המשוואות הבאות :

I) $x' = \gamma(x - vt)$

II) $x = \gamma(x' + vt')$

נציב את המשוואה הראשונה בשניה, ונקבל $x = \gamma[\gamma(x - vt) + vt']$. נפתח סוגריים ונעביר אגפים $\gamma vt' = x(1-\gamma^2) + \gamma^2 vt$ ולכן $t' = \frac{x(1-\gamma^2)}{\gamma v} + \gamma t$.

כעת נרשום את מיקום האור יחסית לצופה חיצוני למערכת ויחסית לצופה על המערכת, והמשוואת בהתאם הן $x = ct$ ו$x' = ct'$.
נציב הכל יחד ונקבל $x' = \gamma(x - vt) = ct' = \frac{cx}{\gamma v}(1-\gamma^2) + c\gamma t$.

נעביר אגפים ונקבל $\gamma t(c - v) = c\left[\frac{1-\gamma^2}{\gamma v}ct + \gamma t\right]$ נצמצם בt ונפתח סוגריים לקבל $-\gamma v = \frac{c^2(1-\gamma^2)}{\gamma v}$. שוב, נעביר אגפים כדי לקבל $\frac{\gamma^2 v^2}{c^2} = \gamma^2 - 1$ ונקבל ש$\gamma^2 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$ ולכן $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ וככה מוצאים את קבוע לורנץ.

טרנספורמציית לורנץ היא
$$\begin{cases} y' = y \\ z' = z \\ x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ t' = \dfrac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{cases}$$
וגם $t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, $x = \frac{x' + vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

דוגמא 1 : חלקיק נע בזווית של 60 מעלות עם ציר הx,במערכת o, ובמהירות c/2. מערכת o' נעה במהירות 0.6c ביחס למערכת o בציר המשותף x,x'. מהי מהירות החלקיק במערכת האור?

פתרון : v = מהירות בין המערכות. U=מהירות החלקיק

מתקיים $u'_y = \frac{c}{2}\sin 60$, $u'_x = \frac{c}{2}\cos 60$. גם כן $x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ ו$x' = u'_x t'$. לכן $\frac{\frac{c}{2}\cos 60\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. נעביר אגפים ומצמצם ואז נקבל $x = \frac{\left(\frac{c}{2}\cos 60 + 0.6c\right)t}{1 + \frac{0.6c}{c}\frac{}{2}\cos 60} = 0.74ct$.

באופן דומה, $y' = y = u'_y = \frac{c}{2}\sin 60 \frac{\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{c}{2}\sin 60 \frac{t - 0.6c \cdot \frac{0.74ct}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 0.3ct$.

דוגמא 2 : מערכת o' נעה ביחס למערכת o במהירות 0.8c לאורך ציר x-x' המשותף השעונים של שתי הצופים מסונכרנים כך ש t=t'=0 כשx=x'=0. לפי צופה o חלקיק ב x=50m בזמן $t = 2 \cdot 10^{-7} sec$. מהי יהיה הזמן של o'?

פתרון : ע"פ טרנספורמציית לורנץ $t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{2\cdot 10^{-7} - \frac{0.8c \cdot 50}{c^2}}{\sqrt{1-0{,}8^2}} = 1.11 \cdot 10^{-7} sec$.

דוגמא 3 : חלקיק נוסף נצפה ע"י צופה o' ומתקבלים הנתונים $t' = 2 \cdot 10^{-7} sec$, x'=10m מה ההפרש זמנים בין המאורעות לפי צופה o?

פתרון: ע״פ לורנץ שוב נקבל $t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 2 \cdot 10^{-7} + \frac{0.8c}{c^2} \cdot 10 = 3.37 \cdot 10^{-7} sec$.

הפרשי הזמנים: $t_2 - t_1 = (3.37 - 2) \cdot 10^{-7} = 1.37 \cdot 10^{-7} sec$.

דוגמא 4: טיל נע במהירות 0.8c ביחס לתחנת חלל. ברגע היציאה x=x'=0 צופה o מציץ בטלסקופ אל שעונו של o'. מה הוא ייראה כאשר השעון שלו מראה 30sec?

פתרון: נגדיר E קרן נפלטה מ-o'. וR קרן הגיעה לo. מתקיים $\Delta x = c \cdot \Delta t$. ולכן $-x_E + \underbrace{x_R}_{0} = -C\left(\overbrace{t_R}^{30} - t_E\right)$. ע״פ טרנספורמצית לורנץ $\frac{4}{3}t'_E = \frac{0.8ct'_E}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{x'_E + vt'_E}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = x_E$ ובאופן דומה $\frac{5}{3}t'_E = \frac{t'_E}{\frac{3}{5}} = \frac{t'_E + \frac{vx'_E}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = t_E$. נציב ונפתור $-\frac{4}{3}ct'_E = -c\left(30 - \frac{3}{5}t_E\right)$ ואז $t'_E = 10\ sec$.