תרגול 3 - פתרון.

שאלה 1

1) (א) $\mu_F(I_1)=\mu_F((3,\infty))=\lim_{x\to\infty}F(x)-F(3)=21-11=10$

(ב) $\mu_F(I_2)=\mu_F((\frac{1}{4},2))=\lim_{x\to 2^-}F(x)-F(\frac{1}{4})=9-(5.5)=3.5$

(ג) $\mu_F(I_3)=\mu_F([-1,0])=F(0)-\lim_{x\to -1^-}F(x)=5-(\frac{3}{e}+1)=4-\frac{3}{e}$

(ד) $\mu_F(I_4)=\mu_F(\{-2,0,4,6\})\overset{\text{אדיטיביות } \mu_F}{=}\mu_F(\{-2\})+\mu_F(\{0\})+\mu_F(\{4\})+\mu_F(\{6\})=$

$=(F(2)-\lim_{x\to 2^-}F(x))+(F(0)-\lim_{x\to 0^-}F(x))+(F(4)-\lim_{x\to 4^-}F(x))+(F(6)-\lim_{x\to 6^-}F(x))=$

$=(9-9)+(5-4)+(21-13)+(21-21)=9.$

2) הפונקציה F קבועה ב $[5,\infty)$ ולכן מידה של כל תת קבוצה אלמנטרית של $[5,\infty)$ היא 0.

נוסף נוכיח, שלכל $A\subset[5,\infty)$ המידה החיצונית $\mu_F^*(A)$ היא 0 - כאינפימום של אפסים.

לכן, היא מדידה - μ_F (כי קריטריון כרתאודורי נבדק טריוויאלית: ϕ).

קיבלנו: כל תת קבוצה של $[5,\infty)$ מדידה - μ_F

3) נשתמש בטענה הבאה:

יהי: $F:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$ מונוטונית לא יורדת ורציפה מימין.

$A\subseteq(-\infty,0)$ מדידה - μ_F אם״ם קיימות סדרות של קבוצות: E_n, F_n כך שלכל n

E_n פתוחה, F_n סגורה ו- $F_n\subseteq A\subseteq E_n$ וכן: $\lim_{n\to\infty}\mu_F(E_n\setminus F_n)=0$

הוכחה: הוכחנו בגרסה עבור מידת לבג (ראו הוכחה באתר, בקישור "הוכחות מהתרגול").

הוכחת הטענה בטענה - באותו אופן.

כדאי: תהי (סופית) $A\subseteq$, צריך להוכיח

שקיימות E_n, F_n (פתוחות, סגורות) כך ש- $F_n\subseteq A\subseteq E_n$ $\quad \lim_{n\to\infty} m(E_n\setminus F_n)=0$

אם ורק אם קיימות E'_n, F'_n (פתוחות, סגורות) כך ש- $F'_n\subseteq A\subseteq E'_n$, $\lim_{n\to\infty}\mu_F(E'_n\setminus F'_n)=0$

ראשית, נניח שקיימות E_n פתוחות, F_n סגורות

כך ש- $F_n\subseteq A\subseteq E_n$

$$(*)\quad \lim_{n\to\infty} m(E_n\setminus F_n)=0$$

נשים לב שלכל קטע I (פתוח/סגור/חצי פתוח חצי סגור)

שמוכל ב- $(-\infty,0)$

$$0\le \mu_F(I)\le 3m(I)$$

(כי לכל $-\infty<a<b\le 0$
$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}\le 3e^b\le 3$
ע"י שימוש במשפט הערך הממוצע של לגרנז')

לכן, מאחר שזה נכון עבור איחוד זר של קטעים ב- $(-\infty,0)$. מתכונת ההרחבה (כקבוצה תתחום של איחוד של קט' זרים מתקיים היחס הנ"ל), נקבל ש:

$$0\le\mu_F(E_n\setminus F_n)\le 3m(E_n\setminus F_n)$$

ולכן, לפי כלל הסנדוויץ', מההנחה (*) נקבל: $\mu_F(E_n\setminus F_n)\xrightarrow{n\to\infty}0$

ומצאנו $E'_n:=E_n$ $\quad F'_n:=F_n$ כנדרש.

ובאופן דומה:

מצד שני, נניח כי A חסומה, וקיימות E'_n פתוחות F'_n סגורות כך ש-

$$F'_n\subseteq A\subseteq E'_n\subset(r,0]\qquad(-\infty<r)$$

$$\lim_{n\to\infty}\mu_F(E'_n\setminus F'_n)=0\quad(**).$$

מכיון שלכל קטע I ב- $[r,0)$: $\quad 3e^r m(I)\le\mu_F(I)$

(כי לכל $r\le a<b\le 0$: $\quad 3e^r\le 3e^a\le\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$ - ע"י שימוש במשפט הערך הממוצע של לגרנז')

מתכונת ההרחבה נקבל ש- $0\le m(E'_n\setminus F'_n)\le\frac{\mu_F(E'_n\setminus F'_n)}{3e^r}$ ולכן: (לפי הנחה (**)) $m(E'_n\setminus F'_n)\xrightarrow{n\to\infty}0$

ומצאנו $E_n:=E'_n$; $F_n:=F'_n$ כנדרש.

נוספנה:

הוכחנו כי לכל $A \subseteq (-\infty,0)$ חסומה

A מדידה μ_F אמ"מ A מדידה לבג.

עבור $A \subset (-\infty,0)$ כללית, נציג את A כאיחוד מני בר של קב' חסומות

$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, כאשר: $A_k = (A \cap [-k,-k+1))$

אזי:

קו נובע לפי שימוש בסגירות הק' המדידות לאיחודים וחיתוכים בנ"מ.

A מדידה μ_F $\Longleftrightarrow$ לכל k A_k מדידה μ_F

לפי הנוסחנה $\Longleftrightarrow$ לכל k A_k מדידה לבג

$\Longleftrightarrow$ A מדידה לבג.

ולכן $A \subseteq (-\infty,0)$ מדידה μ_F אמ"מ היא מדידה לבג.

שאלה 2

1) צריך להראות כי $\mathcal{B}_f$ הינה σ-אלגברה מעל Y.

נבדוק לפי ההגדרה:

(א) $Y \in \mathcal{B}_f$ שכן $X \in \mathcal{A}$ ו- $X = f^{-1}[Y]$

(ב) נניח $\{A_n\} \subseteq \mathcal{B}_f$ אזי לכל: $f^{-1}[A_n] \in \mathcal{A}$

ולכן $\bigcup f^{-1}[A_n] \in \mathcal{A}$ (כי $\mathcal{A}$ σ-אלג')

אולם: $\bigcup f^{-1}[A_n] = f^{-1}[\bigcup A_n]$

ולכן $\bigcup A_n \in \mathcal{B}_f$

(ג) ננח $A \in \mathcal{B}_f$ אזי $f^{-1}[A] \in \mathcal{A}$ ולכן $(f^{-1}[A])^c \in \mathcal{A}$

(כי $\mathcal{A}$ σ-אלג'), אולם: $(f^{-1}[A])^c = f^{-1}[A^c]$

מכיון ש f פונקציה מעל X. נקבל $A^c \in \mathcal{B}_f$.

ולכן $(Y, \mathcal{B}_f)$ מרחב מדיד

2) צריך להראות כי ν היא מידה חיובית מעל $(Y,\mathcal{B}_f)$

נבדוק לפי ההגדרה.

א) לכל $E \in \mathcal{B}_f$ $\mu(f^{-1}[E]) \geq 0$ כי μ מידה חיובית

ולכן: $0 \leq \nu(E)$

ב) $f^{-1}[\phi] = \phi$ ו- $\mu(\phi) = 0$ כי μ מידה

לכן $\nu(\phi) = 0$

ג) יהיו $A_n \in \mathcal{B}_f$ זרות בזוגות

אזי $f^{-1}[A_n]$ זרות בזוגות (כי f פונקציה)
בפרט - מוגדרת היטב.

ומכיון שμ מידה:

$$\nu(f^{-1}[\cup A_n]) = \nu(\cup f^{-1}[A_n]) = \mu(\cup f^{-1}[A_n]) = \sum \mu(f^{-1}[A_n]) = \sum \nu(A_n)$$

$$f^{-1}[\cup A_n] = \cup f^{-1}[A_n]$$

לכן $(Y,\mathcal{B}_f,\nu)$ היא מרחב מידה חיובית.

(1 נגדיר

$$F_n := \bigcap_{k \geq n} E_k \in \mathcal{A}$$

$$F := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \liminf E_n \in \mathcal{A}$$

מההגדרה נובע - $F_n \subseteq F_{n+1}$ (כלומר: F_n סדרה עולה של קבוצות)

לכן: $\forall n \quad F_n = F_1 \cup (F_2 \setminus F_1) \cup \ldots \cup (F_n \setminus F_{n-1})$

וכל הקב' באיחוד הנ"ל הן נפרדות.

מסופ-אדיטיביות μ :

$$\mu(F_n) = \mu(F_1) + \mu(F_2 \setminus F_1) + \ldots + \mu(F_n \setminus F_{n-1})$$

כמו כן:

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = F_1 \cup (F_2 \setminus F_1) \cup \ldots$$

ולכן: $\mu(F) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \mu(F_1) + \mu(F_2 \setminus F_1) + \mu(F_3 \setminus F_2) + \ldots$

סכום של טור = אצל הסכומים החלקיים $\rightarrow = \lim_{n \to \infty} \left\{ \mu(F_1) + \mu(F_2 \setminus F_1) + \ldots + \mu(F_n \setminus F_{n-1}) \right)$

$$= \lim_{n \to \infty} \mu(F_n)$$

כמו כן, לכל n: $F_n \subseteq E_n$, לכן - ממונוטוניות μ: $\mu(F_n) \leq \mu(E_n)$

ומכאן מקבל: $\mu(F) = \lim_{n \to \infty} \mu(F_n) \leq \liminf \mu(E_n)$.

בסה"כ $\mu(\liminf E_n) = \mu(F) \leq \liminf \mu(E_n)$

כנדרש.

2) נגדיר: $F_n := \bigcup_{k\geq n} E_n \in \mathcal{A}$

$F := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \limsup E_n \in \mathcal{A}$.

$F_{n+1} \subseteq F_n$ -סדרה יורדת ב $\mathcal{A}$

כמוסבר ב(1) ולפי הנתון, קיים n_0 כך ש- $\mu(F_{n_0}) < \infty$ ($\forall n\geq n_0$ $\mu(F_n) \overset{F_n \subseteq F_{n_0}}{\leq} \mu(F_{n_0})$ מונוטוניות)

$$\mu(F) = \mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\Big) \underset{F_n \text{ יורדת}}{=} \mu\Big(F_{n_0} \setminus \Big(\bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} (F_{n_0} \setminus F_n)\Big)\Big) \underset{\text{חיסור - סופיות של המידה}}{=} \mu(F_{n_0}) - \mu\Big(\overbrace{\bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} (F_{n_0} \setminus F_n)}^{\text{סדרה עולה}}\Big) =$$

$$= \mu(F_{n_0}) - \lim \mu(F_{n_0} \setminus F_n) = \mu(F_{n_0}) - \mu(F_{n_0}) + \lim \mu(F_n) = \lim \mu(F_n)$$

בנוסף, מהגדרת F_n נובע שלכל n: $E_n \subseteq F_n$ $\underset{\text{מונוטוניות } \mu}{\Leftarrow}$ $\mu(E_n) \leq \mu(F_n)$

לכן גם

$$\mu(\limsup E_n) = \mu(F) = \lim \mu(F_n) \geq \limsup \mu(E_n).$$

כנדרש.

שאלה 4

נבדוק לפי ההגדרה:

(א) לכל $F \in \mathcal{A}$ $\quad 0 \overset{\mu \text{ חיובית}}{\leq} \mu(F \cap S)$ ולכן $0 \leq \nu(F)$ - חיובית

(ב) $\nu(\phi) = \mu(\phi \cap S) = \mu(\phi) \underset{\mu \text{ מידה}}{=} 0$

(ג) תהי $\{F_n\}$ סדרה של קבוצות מדידות-$\mathcal{A}$ זרות בזוגות.

אזי:

$$\nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\Big) = \mu\Big(S \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\Big)\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (S \cap F_n)\Big) \underset{\sigma \text{ אדיטיביות } \mu}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S \cap F_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(F_n)$$

קיבלנו: ν מידה חיובית על $(X, \mathcal{A})$.