30.12.14 (1)

שיטות נומריות מתקדמות - הרצאה 10

<u>תזכורת:</u> אלמנטים סופיים

מד"ח L-S (שטורם-ליוביל) מצאנו פתרון חלש במרחב H_0^1.

u נקרא פתרון חלש של $Lu=f$ אם

$$\forall\ v\in H_0^1 \quad \langle Lu-f, v\rangle = 0$$

הסתכלנו על תת מרחב $H_m \subset H_0^1$ עם בסיס <u>סופי</u>

שלא כמו H_0^1 (אינסופי), $H_m = span\{\varphi_1,\dots,\varphi_m\}$.

הסתכלנו על <u>שיטת גלרקין</u> $d(u) = Lu-f$ דפקט

$$Lu_m - f \perp H_m \longrightarrow$$ נותן מע. משוואות לינאריות

$$\boxed{u_m = \sum \gamma_k \varphi_k}$$ עבור המקדמים.

שיטה נוספת של ריץ: עקרון וריאציוני

<u>נכליל את השיטות:</u>

מד"ח עם תנאי שפה $Lu=f$

$u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, L אופ' דיפרנציאלי לינארי מסדר 2p

תחום $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה וקשירה.

תנאי שפה (הומוגני) על $\partial\Omega$ (דיריכלה או נוימן).

- <u>פתרון חלש:</u> נרצה למצוא מרחב שבו

$$\forall v, \quad \langle Lu-f, v\rangle = 0$$

ניקח מרחב H_0^p כאשר

$$H^p = \{v\in L^2 : k^p \hat{v}(k) \in L^2\}$$

כאשר $\hat{v}(k)$ הוא טרנספורם פורייה של v.

למה p ולא 2p?

$$\langle \underset{\smile}{L}u, v\rangle$$

2p נגזרות

p נגזרות אפשר להעביר מ Lu ל v.

משפט הדיברגנץ / גרין

$$\int_\Omega (\nabla^2 u) v \, dv + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dv = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds$$

המשפט עוזר לעבור מ־ע2 נגזרות ל־ע נגזרות

$$\langle Lu, v \rangle = \langle \underbrace{\frac{\partial^{\text{ע}} u}{\partial x^{\text{ע}}}}_{\in L^2}, \underbrace{\frac{\partial^{\text{ע}} v}{\partial x^{\text{ע}}}}_{\in L^2} \rangle$$

u ו־v ב־$H^{\text{ע}}$
ולכן הנגזרת מספר ע ב־L^2.

הגדרות: L אופרטור דיפרנציאלי לינארי.

- L צמוד לעצמו self-adjoint $\langle Lu, w \rangle = \langle u, Lw \rangle$
- אליפטי $\langle v, Lv \rangle > 0 \quad \forall v \neq 0$
- חיובי ממש = צמוד לעצמו ואליפטי.
- אליפטי יוניפורמי קיים C כך ש $\langle Lv, v \rangle > C \langle v, v \rangle, \forall v$

ראינו דוגמא: $L = -\nabla^T B(x) \nabla$ ‏ B סימטרי חיובי לכל x.
L חיובי ממש. + דוגמא לאופרטור S-L חיובי ממש

משפט: יהי L אופרטור חיובי ממש אז $Lu = f$ היא משוואת אוילר-לגרנז' של הבעיה הוריאציונית

$$J(v) = \langle Lv, v \rangle - 2 \langle f, v \rangle$$

$$J(v) : H_0^{\text{ע}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

הוכחה: יהי $u \in H_0^{\text{ע}}$ מינימום מקומי.
כלומר לכל $v \in H_0^{\text{ע}}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, ε מספיק קטן

$$J(u) \leq J(u + \varepsilon v)$$

30.12.14 (2)

$$J(u+\varepsilon v)=\langle L(u+\varepsilon v),u+\varepsilon v\rangle-2\langle f,u+\varepsilon v\rangle=$$

$$=\langle Lu+\varepsilon Lv,u+\varepsilon v\rangle-2\langle f,u+\varepsilon v\rangle=$$

$$=\langle Lu,u\rangle+\varepsilon\langle Lv,u\rangle+\varepsilon\langle Lu,v\rangle+\varepsilon^2\langle Lv,v\rangle$$

$$-2\langle f,u\rangle-2\varepsilon\langle f,v\rangle=$$ (בשימוש כי L צמוד לעצמו)

$$=J(u)+2\varepsilon\left[\langle Lu,v\rangle-\langle f,v\rangle\right]+\varepsilon^2\langle Lv,v\rangle\geq J(u)$$

$$\Rightarrow\quad 2\varepsilon\underbrace{\langle Lu-f,v\rangle}_{=0}\geq-\varepsilon^2\underbrace{\langle Lv,v\rangle}_{>0}$$

לכן לכל v $\quad\langle Lu-f,v\rangle=0$

נראה כי <u>המינימום יחיד</u>: נניח שיש 2, u_1,u_2.

שייכים ל H_0^ν $\Leftarrow$ $u_1-u_2\in H_0^\nu$

$$J(u_2)=J(u_1+(u_2-u_1))=$$

$$=\langle L[u_1+(u_2-u_1)],u_1+(u_2-u_1)\rangle-2\langle f,u_1+(u_2-u_1)\rangle$$

$$=\langle Lu_1,u_1\rangle+\langle L(u_2-u_1),u_1\rangle+\langle Lu_1,u_2-u_1\rangle$$

$$+\langle L(u_2-u_1),u_2-u_1\rangle-2\langle f,u_1\rangle-2\langle f,u_2-u_1\rangle$$

$$=J(u_1)+\langle Lu_2,u_1\rangle-\langle Lu_1,u_1\rangle+\langle Lu_1,u_2-u_1\rangle$$

$$+\langle Lu_2,u_2-u_1\rangle-\langle Lu_1,u_2-u_1\rangle-2\langle f,u_2-u_1\rangle$$

$$=J(u_1)+\cancel{\langle f,u_1\rangle}-\cancel{\langle f,u_1\rangle}+\cancel{\langle f,u_2-u_1\rangle}$$

$$+\cancel{\langle f,u_2-u_1\rangle}-\cancel{\langle f,u_2-u_1\rangle}-2\langle f,u_2-u_1\rangle$$

$$=J(u_1)-\langle f,u_2-u_1\rangle$$

הוכחה יותר מסודרת: אז $w = u_2 - u_1$

$$J(u_2) = J(u_1 + w) = \langle L(u_1+w), u_1+w\rangle - 2\langle f, u_1+w\rangle$$

$$= \langle Lu_1 + Lw, u_1+w\rangle - 2\langle f, u_1\rangle - 2\langle f, w\rangle$$

$$= \langle Lu_1, u_1\rangle + \langle Lu_1, w\rangle + \langle Lw, u_1\rangle + \langle Lw, w\rangle$$

$$- 2\langle f, u_1\rangle - 2\langle f, w\rangle =$$

$$= J(u_1) + \underbrace{\langle Lw, w\rangle}_{\geq 0} + \underbrace{2\langle Lu_1, w\rangle - 2\langle f, w\rangle}_{= 2\langle Lu_1 - f, w\rangle = 0}$$

$$\geq J(u_1)$$

וגם להפך נכון $J(u_1) \geq J(u_2)$

ולכן $J(u_1) = J(u_2)$

והמסקנה: $u_1 = u_2$ המינימום יחיד.

$\Leftarrow$ במקום למצוא פתרון חלש למשוואה ניתן למצוא מינימום של הפונקציונאל J.

- רוצים לקרב את הפתרון $u \in H_0^1$ מתוך תת-מרחב $H_m = \mathrm{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$

שיטת ריץ / Ritz

נמצא את המינימום של $J(v)$ ב- H_m.

נקח $v = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \varphi_k$

נציב ב J ונקבל

$$J(v) = \left\langle \sum_{k=1}^{m} \gamma_k L\varphi_k, \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \varphi_j \right\rangle - 2\left\langle f, \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \varphi_k \right\rangle =$$

$$= \sum_{k,j} \gamma_k \gamma_j \underbrace{\langle L\varphi_k, \varphi_j\rangle}_{a_{kj}} - 2\sum_{k=1}^{m} \gamma_k \underbrace{\langle f, \varphi_k\rangle}_{b_j}$$

30.12.14 (3)

$$\Rightarrow J(v) = \gamma^T A \gamma - 2\gamma^T b$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m}$$

זו מערכת לינארי — למציאת המינימום.

<u>שיטת גלרקין</u>: נסתכל על הפרש

$$\underset{\text{נדרוש}}{Lu - f \perp H_m}$$

$$\Rightarrow \forall j=1,\dots,m \ , \quad u = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \varphi_k$$

$$\langle \sum \gamma_k L\varphi_k - f, \varphi_j \rangle = 0 \Leftarrow$$ (מאונך לכל הפונק' בבסיס)

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \langle L\varphi_k, \varphi_j \rangle = \langle f, \varphi_j \rangle$$ מ. משוואות לינאריות:

אופרטורים שאינם צמודים לעצמם

<u>הגדרה</u>: $v \in H_0^{\nu}$ נגדיר:

$$\|v\|_H^2 = \|v\|_{L^2}^2 + \langle Lv, v \rangle$$

<u>תרגיל</u>: הראה כי זו נורמה!

<u>הגדרה</u>: אופרטור L נקרא חסום (bounded) אם

$$\exists \delta > 0, \forall v,w \in H: \ |\langle Lv, w\rangle| \le \delta \|v\|_H \cdot \|w\|_H$$

<u>הגדרה</u>: אופרטור L נקרא קוארסיבי (Coercive) אם

$$\exists k > 0, \forall v \in H_0^{\nu}: \ \langle Lv, v \rangle \ge k \|v\|_H^2$$

משפט: Lax-Milgram

L אופרטור לינארי, חסום וקואורסיבי $V\subset H_0^{\nu}$

א. $\forall v\in V$ $\langle L\tilde{u}-f, v\rangle = 0$, $\exists !\ \tilde{u}\in V$

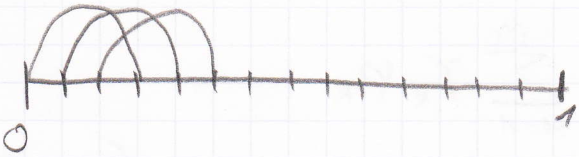
ויחיד

ב. $$\|\tilde{u}-u\|_H \le \frac{\delta}{k}\underbrace{\inf_{v\in V}\|v-u\|_H}$$

כמה טוב ניתן לקרב את הפתרון u ע״י פונק׳ מ-V.

איך מקרבים פונ׳ רציפות ע״י כובעים?

קירוב ע״י פולינומים מספר p בקטע באורך ph.



$p=2$

$h=\frac{1}{m}$

$$\overset{L-M}{\Rightarrow} \|u_m-u\|_H \le c\cdot h^{p+1-\nu}\|u^{(p+1)}\|_2$$

אם $\nu \le p+1$ מתכנס.

שיטות ספקטרליות

(לקוח מספר: Chebyshev and Fourier Spectral Methods . Boyd)

הרעיון הבסיסי: מד״ח + תנאי שפה $Lu=f$

נניח שקיים פתרון חלש במרחב H

נחפש קירוב במרחב H_m עם בסיס $\varphi_m,\dots,\varphi_1$,

1. למשל אם $u\in C^\infty$ מחזורי ב $[-\pi,\pi]$ נשתמש בטורי פוריה

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos kx+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx\,,\qquad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(x)\cos(kx)\,dx,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(x)\sin(kx)\,dx$$

2. טור חזקות (טור טיילור)

31.12.14 (4)

במימד 1 דוגמא:

$$\begin{cases} u_{xx}-(x^6+3x^2)u=0 \\ u(-1)=u(1)=1 \end{cases}$$

הפתרון המדויק:

$$u(x)=e^{\frac{1}{4}(x^4-1)}$$

$\mathbb{P}_0^0+\varphi_0$: (מרחב הפולינומים מספר 0)

$$u(x)=1$$

$\mathbb{P}_0^1+\underbrace{\varphi_0}_{=1}$

$$u(x)=1$$

$\mathbb{P}_0^2+\varphi_0$:

$$u(x)=c(x^2-1)+1$$

איך נבחר את C?

נגדיר את השארית / Residue $\quad R(u)=u_{xx}-(x^6+3x^2)u$ מהמשוואה

נדרוש את ה [illegible]

$$R(u)=2c-(x^6+3x^2)\left[c(x^2-1)+1\right]=$$

(נדרוש מינימום)

$$= \;\ldots$$

נבחר ערך בנק' כלשהי, למשל $x=0$

$$\Rightarrow 2c=0$$

$$c=0$$

קיבלנו שוב $u(x)=1$

$\mathbb{P}_0^3+\varphi_0$:

שכן הפתרון $u=1$ זוגי ולכן

חזקות אי זוגיות לא תורמות

$\mathbb{P}^4+\varphi_0$:

$$u(x)=(x^2-1)(ax^2+bx+c)+1$$

$$R=\ldots$$

מותר 3 נק' $x=0,\pm\frac{1}{2}$ ואפשר לקבל

$$a=\frac{784}{3807}=c \qquad b=0$$

בטור פורייה. קצב ההתכנסות תלוי בכמה נגזרות רציפות יש ל-u. אם ל-u יש n נגזרות רציפות

$$|a_k|,|b_k| \le \frac{c}{k^n}$$

התכנסות א' עבור פונ' לא רציפות/לא מחזוריות

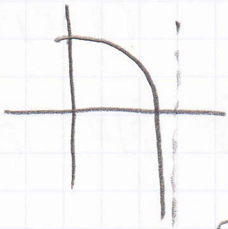
טורי חזקות, טור טיילור

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

טור טיילור הוא בעל רדיוס התכנסות תלוי במיקום של נקודות סינגולריות.

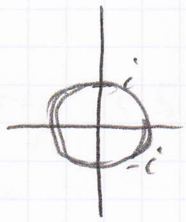
למשל $\frac{1}{1-x}$ יש נק' סינגולרית ב $x=1$

ולכן רדיוס ההתכנסות סביב $x=0$ הוא $r=1$



יתכן והבעיה, הנק' הסינגולרית, אינה על הציר הממשי.

למשל $\frac{1}{1+x^2}$ יש סינגולריות ב: $x=\pm i$



נניח שהמצאנו מד"ח בקטע $[-2,2]$ שהפתרון $\frac{1}{1+x^2}$

לא נוכל לקרב את הפתרון בטור חזקות

30.12.14 (5)

הפתרון: שימוש בפולינום ד' בניב (בשיעור הבא).

התכנסות טורי פורייה ב $[-\pi,\pi]$

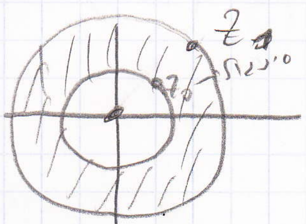
נתונה פונקציה $u(x)$ (ממשית) $u(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)e^{-inx}\,dx$$

נסמן $z=e^{ix}$ ונקבל

טור לורן/Laurent $u(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$

תחום התכנסות של טור לורן:



יש רדיוס התכנסות עד הנק' הסינגולרית הראשונה.

$\Leftarrow$ רדיוס התכנסות $|z_0|$

באופן כללי: תחום התכנסות של לורן: $r_1<|z|<r_2$ (טבעת)

* אם $|z|\le r_0$; $z=e^{ix}$

$|e^{ix}|\le r_0$ $\quad x=a+ib$

$|e^{ia}e^{-b}|=|e^{-b}|\le r_0$

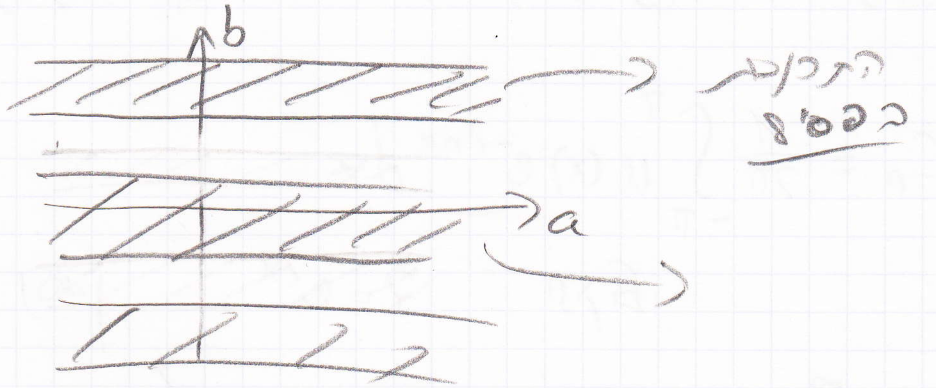
$e^{-b}\le r_0 \Rightarrow -b\le \ln(r_0)$

$\boxed{b\ge -\ln(r_0)}$

ואז יש טבעת: $r_1 < |z| < r_2$

$\Rightarrow -\ln r_2 < b < -\ln r_1$

תחומי התכנסות תלויים רק ב b (החלק המדומה.)



לכן טור פוריה מתכנס ברצועה סביב הציר הממשי.
(אך אין נקודה סינגולרית על הציר הממשי!)