# אלגברה לינארית למהנדסים - פתרון תרגיל בית 1

.1

א. כדי להוכיח $-(a+b)=-a-b$ יש להראות, לפי הגדרת איבר נגדי, כי $(a+b)+(-a-b)=0$.
ואכן מקומוטטיביות ואסוציאטיביות נקבל
$(a+b)+(-a-b)=(a+(-a))+(b+(-b))=0$.
ב. מחוג הפילוג,
$a(b-c)=a(b+(-c))=ab+a(-c)$.
בתרגול הראינו כי $a(-c)=-ac$, ולכן $a(b-c)=ab-ac$.
ג. כדי להוכיח כי $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$ יש להראות כי $(ab)(a^{-1}b^{-1})=1$.
ואכן (מקומוטטיביות ואסוציאטיביות),
$(ab)(a^{-1}b^{-1})=aa^{-1}bb^{-1}=1\cdot 1=1$.
ד. אם $a\neq 0$ וכן $ab=ac$ אזי $ab-ac=ac-ac=0$. מסעיף ב',
$ab-ac=a(b-c)$ ולכן $a(b-c)=0$. נכפול את שני אגפי השוויון האחרון ב-$a^{-1}$ ונקבל
$a^{-1}a(b-c)=a^{-1}\cdot 0$, כלומר $b-c=0$, ומכך $b=c$.
ה. נניח כי $ab=0$. אם $a=0$ סיימנו. נניח כי $a\neq 0$. מתקיים $ab=a\cdot 0$. מסעיף קודם, $b=0$.
ו. מחוק הפילוג,
$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ba-b^2$.
$ab=ba$ מקומוטטיביות ולכן נקבל $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.
ז. נניח כי $a^2=1$. אז $a^2-1=0$. אולם מסעיף קודם,
$a^2-1=(a+1)(a-1)$ ולכן
$(a+1)(a-1)=0$,
ומסעיף ה, $a+1=0$ או $a-1=0$. כלומר $a=1$ או $a=-1$.

.2

נוכיח כי $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ הינו שדה.
יהיו $a+b\sqrt{2},c+d\sqrt{2}\in\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
סגירות לחיבור: $(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}\in\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
באופן דומה מתקיימת סגירות לכפל, לפי הגדרת הכפל.
איבר ניטרלי לחיבור: $0$. (שימו לב כי $0\in\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$).
באופן דומה,1 איבר יחידה (ביחס לכפל).
נשים לב כי החיבור והכפל המוגדרים על $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ הם בדיוק החיבור והכפל הרגילים של מספרים ממשיים. לכן מתקיימות תכונות הקומוטטיביות, אסוציאטיביות ודיסטרבוטיביות לכפל וחיבור.
איבר נגדי: ל-$a+b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, גם $-a-b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$—וזהו האיבר הנגדי שלו.
איבר הופכי: נניח כי $a+b\sqrt{2}\neq 0$. נשים לב כי
$\frac{1}{a+b\sqrt{2}}=\frac{1}{a+b\sqrt{2}}\cdot\frac{a-b\sqrt{2}}{a-b\sqrt{2}}=\frac{a}{a^2-2b^2}-\frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}$
וזהו איבר השייך ל-$\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ והוא ההופכי של $a+b\sqrt{2}$.
למשל $\sqrt{2}^{-1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

.3

א. זהו אינו שדה. למשל אקסיומת האיבר הנגדי אינה מתקיימת.

דוגמא: ניקח $a=1$. אם היה איבר נגדי $b\in\mathbb{R}^+$ אז $a+b=0$ אבל אז $b=-a=-1<0$ וזו סתירה. לכן אין ל־$1$ איבר נגדי ב־$\mathbb{R}^+$.

ב. זהו אינו שדה. תכונת הקומוטטיביות אינה מתקיימת.

דוגמא: ניקח $a=0,b=1$. $a\boxplus b=2\neq 1=b\boxplus a$.

ג. זהו אינו שדה. למשל תכונת האיבר הניטרלי אינה מתקיימת.

ראשית, אם בשלילה קיים איבר ניטרלי $a$ אז לכל $b$ מתקיים $b=a\boxplus b=2a+2b$. בפרט עבור $b=0$, היינו מקבלים $2a=0$ ולכן $a=0$. כלומר אם היה איבר ניטרלי, זהו בהכרח $0$. אבל ניקח למשל $b=1$. אז $b=1\neq 2=0\boxplus b$ וקיבלנו סתירה.

## שאלה 4

**א)**

$$(6+3i)(3-2i)=6\cdot 3-3\cdot(-2)+(6\cdot(-2)+3\cdot 3)\,i=24-3i$$

**ב)** $(4-3i)^2=16-24i-9=7-24i$

**ג)**

$$\begin{aligned}\frac{2-7i}{2+4i} &= (2-7i)\,(2+4i)^{-1}=(2-7i)\,\frac{1}{\sqrt{2^2+4^2}}\,(2-4i)\\ &= \frac{1}{\sqrt{20}}\,(-24-22i)=-\frac{24}{\sqrt{20}}-\frac{22}{\sqrt{20}}i\end{aligned}$$

**ד)**

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}}\right)^{10} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)\right)^{10}=\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}e^{\frac{3}{4}\pi i}\right)^{10}\\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^{10}\left(e^{\frac{3}{4}\pi i}\right)^{10}=\frac{2^5}{3^5}e^{\frac{30}{4}\pi i}=\frac{32}{243}\left(e^{2\pi i}\right)^3\left(e^{\frac{3}{2}\pi i}\right)\\ &= \frac{32}{243}\cdot 1\cdot\left(e^{\frac{3}{2}\pi i}\right)=\frac{32}{243}\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)+i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right)=-\frac{32}{243}i\end{aligned}$$

## שאלה 5

פתרון שאלה זה נובע מחישובים פשוטים.

## שאלה 6

**א)** חישוב פשוט.

**ב)** קל לראות שאם $z=0$ אז $|z|=0$. בכיוון השני אנו יודעים כי לכל $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים $y^2,x^2\geq 0$ ו $x^2=0$ אם"ם $x=0$ (וכנ"ל ל $y$) . לכן אם $z=x+iy$ אז

$$|z|^2=x^2+y^2\geq x^2$$

ולכן אם $|z|=0$ אז $|z|^2=0$ ולכן $0\geq x^2\geq 0$ ולכן $x^2=0$ ולכן $x=0$, ובדיוק באותה הצורה גם $y=0$ ולכן $z=0$.

**ג)** חישוב פשוט.

## שאלה 7

נמצא את הפתרונות של המשוואות הבאות:

**א)** $z^6 = 6$.
אם $z = re^{i\theta}$ עבור $r,\theta \in \mathbb{R}$ (שימו לב שאנחנו לא מגבילים את $\theta$ להיות בין 0 ל $2\pi$) אז

$$6 = z^6 = r^6 e^{i(6\theta)}$$

מאחר ש $r^6$ הוא מספר חיובי ב $\mathbb{R}$, אנו מקבלים כי $e^{i(6\theta)}$ הוא מספר חיובי ב $\mathbb{R}$. זה גורר (וודאו שאתם מבינים מדוע!) שקיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש $6\theta = 2\pi k$, ולכן $\theta = 2\pi\frac{k}{6}$, ואז $e^{i(6\theta)} = 1$, ואז $r = \sqrt[6]{6}$ (ברור כי גם $r = -\sqrt[6]{6}$ ייתכן, אולם זה שקול להוספת 3 ל $k$ כי אז הסימן של $e^{i\theta}$ מתהפך). אם כך כל הפתרונות האפשריים הם

$$z_k = \sqrt[6]{6}e^{\frac{k}{6}2\pi i},\ k \in \mathbb{Z}$$

וקל לראות שאם $k_1 \equiv k_2 \, mod\, 6$ אז $z_{k_1} = z_{k_2}$, ולכן כל הפתרונות האפשריים הם

$$z_k = \sqrt[6]{6}e^{\frac{k}{6}2\pi i},\ k = 0, 1, \ldots, 5$$

וחישוב מהיר מראה שכל אלו הם אכן פתרונות, וכי הם שונים זה מזה, ולכן אלו הם כל הפתרונות למשוואה.

**ב)** $e^z = 1 + i$.
אם $z = x + iy$ עבור $x, y \in \mathbb{R}$ אז $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$. לכן אנו מקבלים את המשוואות

$$\begin{aligned} e^x \cos y &= 1 \\ e^x \sin y &= 1 \end{aligned}$$

וחלוקה נותנת לנו

$$\tan y = 1$$

ולכן $y = \frac{\pi}{4} + k\pi$ עבור $k \in \mathbb{Z}$. אולם אם $k$ איזוגי אז $\cos y < 0$ אבל $e^x > 0$ וזו סתירה למשוואות. ולכן $k$ זוגי או בצורה שקולה $y = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ עבור $k \in \mathbb{Z}$. עבור כל אחד מהערכים האלו מתקיים

$$\cos y = \sin y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ולכן $x = \ln\sqrt{2} = \frac{\ln 2}{2}$. סה"כ אנחנו מקבלים שכל הערכים האפשריים ל $z$ הם

$$z = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

וקל לראות שכל הערכים הללו פותרים את המשוואה, ושונים זה מזה.

**ג)** $-iz^2 + (3 - 5i)z + 7\frac{1}{2} = 0$
אותה ההוכחה לנוסחת השורשים שאנו מכירים מ $\mathbb{R}$ תקפה גם עבור $\mathbb{C}$ (ולמעשה לכל שדה

ממציין $\neq 2$). נשתמש בה ונקבל כי:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{-3+5i\pm\sqrt{(3-5i)^2+30i}}{-2i} = \frac{-3+5i\pm\sqrt{-16}}{-2i} = \frac{-3+5i\pm 4i}{-2i} \\ z_1 &= \frac{-3+9i}{-2i} = -\frac{9}{2}-\frac{3}{2}i \\ z_2 &= \frac{-3+i}{-2i} = -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i \end{aligned}$$