הקורס: אינפי מתקדם
המרצה: פרופסור אגרנובסקי
המתרגלים: מני ולואי

פתרון תרגיל בית מספר 6

<u>שאלה 1</u> (מבחן תשנ"ה)

א. כתבו נוסחת טיילור בנקודה $(0,0)$ עם שארית Peano לפונקציה $f(x,y)=\frac{1}{1-xy}$ עד סדר 8. (השתמשו בנוסחת סכום של סדרה הנדסית)

נשים לב כי קיימת סביבה של $(0,0)$ בה $|xy|<1$ ולכן ניתן להשתמש בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית. נקבל: $\sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n=\frac{1}{1-xy}$. אנו מעוניינים בפיתוח מסדר 8 ולכן נבחר $n=4$.

אזי: $\sum_{n=5}^{\infty}(xy)^n+\sum_{n=0}^{4}(xy)^n=\frac{1}{1-xy}$. כעת נותר להראות ש- $\sum_{n=5}^{\infty}(xy)^n=o\left(\|(x,y)\|^8\right)$, ז"א:

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sum_{n=5}^{\infty}(xy)^n}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^8}=0$. ואכן: (במעבר לקואורדינטות פולריות)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sum_{n=5}^{\infty}(xy)^n}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^8}=\lim_{r\to0}\frac{\sum_{n=5}^{\infty}r^{2n}\cos^n\theta\sin^n\theta}{r^8}=\lim_{r\to0}\sum_{n=5}^{\infty}\frac{r^{2n}\cos^n\theta\sin^n\theta}{r^8}$$

מתקיים:

$$0\le\left|\sum_{n=5}^{\infty}\frac{r^{2n}\cos^n\theta\sin^n\theta}{r^8}\right|\le\sum_{n=5}^{\infty}\left|\frac{r^{2n}\cos^n\theta\sin^n\theta}{r^8}\right|=\sum_{n=5}^{\infty}\left|\frac{r^{2n}}{r^8}\right|=\sum_{n=5}^{\infty}\frac{r^{2n}}{r^8}=\frac{1}{r^8}\frac{r^{10}}{1-r^2}=\frac{r^2}{1-r^2}\to0$$

לכן $f(x,y)=\sum_{n=0}^{4}(xy)^n+o\left(\|(x,y)\|^8\right)$.

ב. באמצעות סעיף א' מצאו $D^{\alpha}f(0,0)$ עבור $\alpha=(4,4)$

$$\frac{1}{4!4!}D^{(4,4)}f(0,0)=1\ \to\ D^{(4,4)}f(0,0)=4!4!$$

ג. באמצעות סעיף א' מצאו $\frac{\partial^6 f}{\partial y^2\partial x^4}(0,0)$

הקורס: אינפי מתקדם
המרצה: פרופסור אגרנובסקי
המתרגלים: מני ולואי

$\frac{\partial^6 f}{\partial y^2 \partial x^4}(0,0)=0$ שכן לא מופיע בפיתוח שלנו גורם מהצורה y^2x^4 .

שאלה 2 (מבחן תשס"ד)

כתבו פיתוח טיילור של $f(x,y)=\sin\left(xe^y\right)$ מסדר 2 סביב הנקודה $\left(x_0,y_0\right)=\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, עם שארית בצורת Peano.

נשים לב כי $f\in C^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$ ולכן ניתן להשתמש במשפט טיילור.

$f\left(\frac{\pi}{2},0\right)=1$; נמצא דיפרנציאל ראשון:

$f_x=e^y\cos\left(xe^y\right),\ f_x\left(\frac{\pi}{2},0\right)=0\ ;\ f_y=xe^y\cos\left(xe^y\right),\ f_y\left(\frac{\pi}{2},0\right)=0$ ולכן : $df_{(x_0,y_0)}=0$.

נמצא את הדיפרנציאל השני:

$$f_{xx}=-e^{2y}\sin\left(xe^y\right),\ f_{xx}\left(\frac{\pi}{2},0\right)=-1;\ f_{yy}=xe^y\cos\left(xe^y\right)-x^2e^{2y}\sin\left(xe^y\right),\ f_{yy}\left(\frac{\pi}{2},0\right)=-\frac{\pi^2}{4}$$
$$f_{xy}=e^y\cos\left(xe^y\right)-xe^{2y}\sin\left(xe^y\right),\ f_{xy}\left(\frac{\pi}{2},0\right)=-\frac{\pi}{2}$$

ולכן: $d^2f_{(x_0,y_0)}\left(h_1,h_2\right)=-h_1^2-\frac{\pi^2}{4}h_2^2-\pi h_1h_2$.

פיתוח טיילור הוא:

$$f\left(\frac{\pi}{2}+h_1,0+h_2\right)=1+0+\left(-h_1^2-\frac{\pi^2}{4}h_2^2-\pi h_1h_2\right)+o\left(\|h\|^2\right)$$
$$f\left(x,y\right)=1-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2-\frac{\pi^2}{4}y^2-\pi\left(x-\frac{\pi}{2}\right)y+o\left(\left\|\left(x-\frac{\pi}{2},y\right)\right\|^2\right)_{\left(x-\frac{\pi}{2},y\right)\to(0,0)}$$

שאלה 3

כתבו פיתוח טיילור (עם שארית Peano) של $g\left(x,y\right)=x^2-2yx+y^3$ סביב הנקודה $\left(1,3\right)$ עד סדר 2. עשו זאת מבלי לחשב נגזרות חלקיות!

הקורס: אינפי מתקדם
המרצה: פרופסור אגרנובסקי
המתרגלים: מני ולואי

$$g(x,y)=\left(\left(x-1\right)+1\right)^2-2\left(\left(x-1\right)+1\right)\left(\left(y-3\right)+3\right)+\left(\left(y-3\right)+3\right)^3=$$
$$=22-4\left(x-1\right)+25\left(y-3\right)+\left(x-1\right)^2-2\left(x-1\right)\left(y-3\right)+9\left(y-3\right)^2+\left(y-3\right)^3$$

כעת נותר להראות ש- $\left(y-3\right)^3=o\left(\left\|\left(x-1,y-3\right)\right\|^2\right)_{(x-1,y-3)\to(0,0)}$. נסמן:

$h_1=x-1\ ,\ \ h_2=y-3$. מתקיים: $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{h_2^3}{h_1^2+h_2^2}=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{h_2^3}{\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)^2}$. ניתן לראות

כי : $0\le\left|\frac{h_2^3}{h_1^2+h_2^2}\right|\le\left|\frac{h_2^3}{h_2^2}\right|=\left|h_2\right|\to 0$. לכן:

$$g(x,y)=22-4\left(x-1\right)+25\left(y-3\right)+\left(x-1\right)^2-2\left(x-1\right)\left(y-3\right)+9\left(y-3\right)^2+o\left(\left\|\left(x-1,y-3\right)\right\|^2\right)_{(x-1,y-3)\to(0,0)}$$

שאלה 4

א. נשתמש בכך ש $e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\Rightarrow e^{x^2y^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(x^2y^3\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{3}\frac{x^{2n}y^{3n}}{n!}+\sum_{n=4}^{\infty}\frac{x^{2n}y^{3n}}{n!}$ נראה ש

$\left(x,y\right)\to\left(0,0\right),\quad \sum_{n=4}^{\infty}\frac{x^{2n}y^{3n}}{n!}=o\left(\sqrt{x^2+y^2}^{19}\right)$ ונסיק שזהו פיתוח טיילור עד סדר 19 עם

שארית peano בשל יחידות הפיתוח.

נראה ש $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sum_{n=4}^{\infty}\frac{x^{2n}y^{3n}}{n!}}{\sqrt{x^2+y^2}^{19}}=0$ או ע"י מעבר לקואורדינטות פולריות נוכיח ש

$$\lim_{r\to 0}\frac{\sum_{n=4}^{\infty}\frac{r^{5n}\cos^{3n}\theta\sin^{2n}\theta}{n!}}{r^{19}}=0.$$

עבור $r<1$ מתקיים עפ"י נוסחת סכום סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת

$$0\le\left|\frac{\sum_{n=4}^{\infty}\frac{r^{5n}\cos^{3n}\theta\sin^{2n}\theta}{n!}}{r^{19}}\right|\le\frac{\sum_{n=4}^{\infty}\frac{r^{5n}}{n!}}{r^{19}}\le\frac{\sum_{n=4}^{\infty}\left(r^5\right)^n}{r^{19}}=\frac{\frac{r^{20}}{1-r^5}}{r^{19}}=\frac{r}{1-r^5}.$$

כעת, $\lim_{r\to 0}\frac{r}{1-r^5}=0$ ולכן עפ"י משפט הסנדויץ' נקבל $\lim_{r\to 0}\frac{\sum_{n=4}^{\infty}\frac{r^{5n}\cos^{3n}\theta\sin^{2n}\theta}{n!}}{r^{19}}=0$.

הערה- הסיבה שפיתחנו עד $n=3$ היא שכשמציבים $n=4$ פולינום ממעלה 20.

ב. בשל יחידות הפיתוח מתקיים שוויון בין המקדם של x^8y^{11} בפיתוח שלנו שהוא 0 לבין

$\frac{\partial^{19}f}{\partial x^8 y^{11}}(0,0)\cdot\frac{1}{8!\cdot 11!}$ לכן $\frac{\partial^{19}f}{\partial x^8 y^{11}}(0,0)=0$ $\Rightarrow \frac{\partial^{19}f}{\partial x^8 y^{11}}(0,0)\cdot\frac{1}{8!11!}=0$.

שאלה 5

א. הפרכה- ניקח $g(x)=x$, $f(x)=x^2$ מתקיים $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ אבל לא ההיפך ולכן $f(x)=o(g(x)),\quad x\to 0$ ומצד שני $g(x)\neq o(f(x)),\quad x\to 0$.

ב.תהי $0\neq\alpha\in\mathbb{R}$

$$f(x)=o(g(x)),\quad x\to 0\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=0\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\alpha g(x)}=0\Leftrightarrow f(x)=o(\alpha g(x)),\quad x\to 0$$

ג. נראה ש $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x)g(y)}{\sqrt{x^2+y^2}^{\,m+r}}=0$ עפ"י משפט הסנדוויץ'. מהנתון נובע ש

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{|x|^r}=\lim_{y\to 0}\frac{g(y)}{|y|^m}=0$. מכאן,

הקורס: אינפי מתקדם
המרצה: פרופסור אגרנובסקי
המתרגלים: מני ולואי

$$(x,y)\to(0,0)\quad ,0 \le \left|\frac{f(x)g(y)}{\sqrt{x^2+y^2}^{m+r}}\right| \underset{(*)}{\le} \frac{|f(x)|}{|x|^r}\frac{|g(y)|}{|y|^m}\to 0,$$
נותר להוכיח רק את אי השוויון $(*)$

אבל אי שוויון זה נובע מכך ש $\left(x^2+y^2\right)^{m+r} \underset{(**)}{\ge} x^{2r}y^{2m} \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}^{m+r} \ge |x|^r|y|^m$.

מ"ל את אי השוויון $(**)$: עפ"י הבינום של ניוטון מתקיים

$$\left(x^2+y^2\right)^{m+r} = \sum_{k=0}^{m+r}\binom{m+r}{k}\left(x^2\right)^k\left(y^2\right)^{m+r-k} \ge \sum_{k=r}^{r}\binom{m+r}{k}\left(x^2\right)^k\left(y^2\right)^{m+r-k} = \binom{m+r}{r}\left(x^2\right)^r\left(y^2\right)^m \ge x^{2r}y^{2m}$$

שימו לב ש $\binom{m+r}{r}\ge 1$ שכן זהו מספר האפשרויות לבחור r אובייקטים מתוך $m+r$ בלי חשיבות לסדר ובלי חזרה.

<u>שאלה 6</u>

$$e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2),\quad t\to 0$$ ולכן $$e^{2x} = 1+2x+\frac{(2x)^2}{2}+o(x^2),\quad x\to 0$$ (שימו לב

שרשמנו $o(x^2)$ במקום $o((2x)^2)$ כי עפ"י תרגיל 5 ב' ניתן להחליף ביניהם. כמו כן עבור

$|y|<1$ מתקיים $\ln(1+y) = y-y^2+o(y^2),\quad y\to 0$.

לכן

$$e^{2x}\ln(1+y) = \left(1+2x+\frac{(2x)^2}{2}+o(x^2)\right)\left(y-\frac{y^2}{2}+o(y^2)\right) = \left(y-\frac{y^2}{2}+2xy\right)+$$

$$+\left(\left(1+2x+\frac{(2x)^2}{2}+o(x^2)\right)o(y^2)-xy^2+2x^2y-x^2y^2+o(x^2)\left(y-\frac{y^2}{2}\right)\right),\quad (x,y)\to(0,0)$$

נראה ש

$$\left(\left(1+2x+\frac{(2x)^2}{2}+o(x^2)\right)o(y^2)-xy^2+2x^2y-x^2y^2+o(x^2)\left(y-\frac{y^2}{2}\right)\right),\quad (x,y)\to(0,0)$$

הקורס: אינפי מתקדם
המרצה: פרופסור אגרנובסקי
המתרגלים: מני ולואי

שווה ל $o(x^2+y^2)$ (כאשר $(x,y)\to(0,0)$). צ"ל

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left(1+2x+\frac{(2x)^2}{2}+o(x^2)\right)o(y^2)-xy^2+2x^2y-x^2y^2+o(x^2)\left(y-\frac{y^2}{2}\right)}{x^2+y^2}=0$$

$0\le\left|\frac{o(x^2)}{x^2+y^2}\right|\le\frac{o(x^2)}{x^2}$ לכן עפ"י משפט הסנדוויץ' נקבל $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{o(x^2)}{x^2+y^2}=0$ באופן דומה

מראים ש $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{o(y^2)}{x^2+y^2}=0$. כעת, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(1+2x+\frac{(2x)^2}{2}+o(x^2)\right)=1$ כי

$\lim_{x\to0}o(x^2)=\lim_{x\to0}\frac{o(x^2)}{x^2}\cdot\lim_{x\to0}x^2=0\cdot0=0$. לכן

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left(1+2x+\frac{(2x)^2}{2}+o(x^2)\right)o(y^2)+o(x^2)\left(y-\frac{y^2}{2}\right)}{x^2+y^2}=$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left(1+2x+\frac{(2x)^2}{2}+o(x^2)\right)o(y^2)}{x^2+y^2}+\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{o(x^2)\left(y-\frac{y^2}{2}\right)}{x^2+y^2}=1\cdot0+0\cdot0=0$$

כמו כן

$$0\le\left|\frac{-xy^2+2x^2y-x^2y^2}{x^2+y^2}\right|\le\frac{|x|y^2}{x^2+y^2}+\frac{2|y|x^2}{x^2+y^2}+\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\le\frac{|x|y^2}{y^2}+\frac{2|y|x^2}{x^2}+\frac{x^2y^2}{x^2}=|x|+2|y|+y^2$$

וממשפט הסנדוויץ' נקבל $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-xy^2+2x^2y-x^2y^2}{x^2+y^2}=0$ ובסה"כ

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left(1+2x+\frac{(2x)^2}{2}+o(x^2)\right)o(y^2)-xy^2+2x^2y-x^2y^2+o(x^2)\left(y-\frac{y^2}{2}\right)}{x^2+y^2}=0$$ ולכן

הקורס: אינפי מתקדם
המרצה: פרופסור אגרנובסקי
המתרגלים: מני ולואי

$e^{2x}\ln(1+y)=\left(y-\frac{y^2}{2}+2xy\right)+o(x^2+y^2),\quad (x,y)\to(0,0)$ בסביבת $(0,0)$ וזהו הפיתוח המבוקש (בשל יחידות הפיתוח).