הרצאה 10

הגדרה - סידור טוב

קבוצה סדורה (קבוצה עם יחס סדר מלא) תיקרא סדורה היטב, אם לכל תת קבוצה לא ריקה שלה יש איבר ראשון.

יחס סדר $<$ על קבוצה A ייקרא סידור טוב, אם $(A,<)$ היא קבוצה סדורה היטב.

דוגמאות

א. כל קבוצה סדורה סופית היא סדורה היטב.

ב. $\langle \mathbb{N},< \rangle$ סדורה היטב.

טענה

תת קבוצה של קבוצה סדורה היטב אף היא סדורה היטב.

הוכחה

תהיי $\langle A,< \rangle$ קבוצה סדורה היטב, ותהיי B תת קבוצה של A. נראה שגם $\langle B,< \rangle$ סדורה היטב.

אם D תת קבוצה לא ריקה כלשהי של B, אז D היא גם תת קבוצה לא ריקה של A. ככזו יש בה איבר ראשון, כי $\langle A,< \rangle$ סדורה היטב. נסמן ב a איבר ראשון זה. a איבר ראשון ב D, גם כשמדובר על הקבוצה הסדורה $\langle B,< \rangle$, ולכן $\langle B,< \rangle$ סדורה היטב.

משפט

בקבוצה סדורה היטב, לכל איבר שאינו אחרון יש עוקב מידי.

הוכחה

אם a אינו אחרון בקבוצה הסדורה היטב $\langle A,< \rangle$, הקבוצה $\{b\in A | a<b\}$ היא תת קבוצה לא ריקה של A. יהי c האיבר הראשון בקבוצה זו. c הוא עוקב מידי של a, כי אם $a<d<c$, אז $d\in\{b\in A | a<b\}$ בסתירה לכך ש c הוא האיבר הראשון בקבוצה זו.

הגדרה

תהיי $\langle A,< \rangle$ קבוצה סדורה חלקית. תת קבוצה B של A תיקרא שרשרת, אם $\langle B,< \rangle$ סדורה מלא.

דוגמאות

א. ϕ היא שרשרת בכל קבוצה סדורה חלקית.

ב. לכל $a\in A$ $\{a\}$ היא שרשרת.

ג. בקבוצה הסדורה חלקית $\langle P(\mathbb{N}),\subseteq \rangle$ התת קבוצה $\{\phi,\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\},...\}$ היא שרשרת אבל התת קבוצה $\{2\}\cup\{\phi,\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\},...\}$ לא שרשרת מכיוון ש $\{2\}\not\subset\{1\}\wedge\{1\}\not\subset\{2\}$.

הגדרה

שרשרת B בקבוצה סדורה חלקית $\langle A,< \rangle$ תיקרא שרשרת מקסימלית, אם אין שרשרת C כך ש $B\subset C$.

ז"א לכל $a\in A\setminus B$ $B\cup\{a\}$ אינה שרשרת.

משפט (הלמה של צורן)

תהיי $\langle A,< \rangle$ קבוצה סדורה חלקית, שבה לכל שרשרת יש חסם מלעיל ב A. ב A יש איבר מקסימאלי.

דוגמה

תהיי E קבוצה של קבוצות. הוכח שיש ל E תת קבוצה E_0 בעלת התכונות הבאות:

א. כל שני איברים של E_0 זרים זה לזה.

ב. לכל איבר $A\in E\setminus E_0$ קיים $B\in E_0$ כך ש $A\cap B\neq\phi$.

פתרון

אם E ריקה או $|E|=1$, אז E עצמה היא תת קבוצה של E המקיימת את התכונות א, ב.
בכל מקרה אחר, תהי D קבוצת התת קבוצות של E, המקיימות את התכונה א.
D לא ריקה, כי $\varnothing \notin D$.
נסדר את D על ידי היחס $\subset$.
אם D_1 שרשרת ב D, אז $\cup D_1$ הוא חסם מלעיל ל D_1, מכיוון ש $\cup D_1$ מקיים את תכונה א כי אם $A,B \in \cup D_1$, קיימים $E_1,E_2 \in D_1$ כך ש $A \in E_1$ ו $B \in E_2$.
D_1 שרשרת ולכן $E_1 \subseteq E_2 \vee E_2 \subseteq E_1$. לכן $A,B \in E_1 \vee A,B \in E_2$. E_1,E_2 מקיימים את תכונה א, לכן $A \cap B = \varnothing$. ואכן $\cup D_1$ מקיים את תכונה א.
כל איבר של D_1 חלקי ל $\cup D_1$, לכן $\cup D_1$ חסם מלעיל.
לפי הלמה של צורן יש ב D איבר מקסימאלי, נסמנו E_0.
$E_0 \in D$ ולכן מקיים את תכונה א. נוכיח שהוא מקיים את תכונה ב.
אם E_0 לא מקיים את תכונה ב אז קיימת קבוצה $A \in E \setminus E_0$, הזרה לכל איבר של E_0, ז"א $E_0 \cup \{A\}$ מקיים את תכונה א והוא מכיל ממש את E_0, בסתירה למקסימאליות של E_0 לכן E_0 מקיים את תכונות א ו ב.

<u>תרגיל</u>

תהיינה X,Y קבוצות. נגדיר קבוצה $T = \{(A,f) | A \subseteq X : \text{פו' חח"ע } f : A \to Y\}$.
נגדיר יחס סדר על T באופן הבא: $(A_1,f_1) \le (A_2,f_2)$ אם $A_1 \subseteq A_2 \wedge f_2|_{A_1} = f_1$.
הוכח: $(T,\le)$ קבוצה סדורה חלקית.

<u>פתרון</u>

<u>רפלקסיביות:</u> נניח ש $(A,f) \in T$ $A \subseteq A$ ו $f|_A = f$ לכן $(A,f) \le (A,f)$.
<u>אנטי סימטריות:</u> נניח ש $(A_1,f_1),(A_2,f_2) \in T$ כך ש $(A_1,f_1) \le (A_2,f_2) \wedge (A_2,f_2) \le (A_1,f_1)$
מכיוון ש $(A_1,f_1) \le (A_2,f_2)$ אז $A_1 \subseteq A_2$ ומכיוון ש $(A_2,f_2) \le (A_1,f_1)$ אז $A_2 \subseteq A_1$ כלומר $A_1 = A_2$
ומכיוון ש $f_2|_{A_1} = f_1$ נקבל ש $f_2 = f_1$ (כי $A_1 = A_2$) ז"א $(A_1,f_1) = (A_2,f_2)$.
<u>טרנזיטיביות</u>: נניח ש $(A_1,f_1) \le (A_2,f_2) \wedge (A_2,f_2) \le (A_3,f_3)$ אז $A_1 \subseteq A_2 \wedge A_2 \subseteq A_3 \Leftarrow A_1 \subseteq A_3$.
$(A_1,f_1) \le (A_2,f_2) \wedge (A_2,f_2) \le (A_3,f_3)$ אז $f_2|_{A_1} = f_1 \wedge f_3|_{A_2} = f_2 \Rightarrow f_3|_{A_2|_{A_1}} = f_1 \Rightarrow f_3|_{A_1} = f_1$
ולכן $(A_1,f_1) \le (A_3,f_3)$.

<u>משפט השוואת עוצמות</u>

תהיינה X,Y קבוצות. אזי $|X| \le |Y| \vee |Y| \le |X|$.

<u>הוכחה</u>

נגדיר קבוצה $T = \{(A,f) | A \subseteq X : \text{פו' חח"ע } f : A \to Y\}$. $T \ne \varnothing$ מכיוון ש $(\varnothing,\varnothing) \in T$.
נגדיר יחס סדר על T באופן הבא: $(A_1,f_1) \le (A_2,f_2)$ אם $A_1 \subseteq A_2 \wedge f_2|_{A_1} = f_1$ נשים לב ש $(T,\le)$ קבוצה סדורה חלקית. תהיי $\{(A_\alpha,f_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ שרשרת. נגדיר (A,f) באופן הבא: $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ ו
$f : A \to Y$ עבור $x \in A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ קיים $\alpha \in I$ כך ש $x \in A_\alpha$ ואז $f(x) = f_\alpha(x)$.

$f:A\to Y$ מוגדרת היטב מכיוון שאם $x\in A_\alpha \wedge x\in A_\beta$ אז מכיוון ש $\{(A_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ שרשרת אז ניתן להניח ב.ה.ג.כ ש $A_\alpha \subseteq A_\beta$ וש $f_\beta|_{A_\alpha} = f_\alpha$ ולכן $f_\alpha(x)=f_\beta(x)$.

$f:A\to Y$ חח"ע כי אם $x_1\neq x_2\in A$ אז קיימים $\alpha,\beta\in I$ כך ש $x_1\in A_\alpha, x_2\in A_\beta$ מכיוון ש $\{(A_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ שרשרת ניתן להניח ב.ה.ג.כ ש $A_\alpha\subseteq A_\beta$ ולכן $x_1,x_2\in A_\beta$ מכיוון ש f_β חח"ע נקבל ש $f(x_1)=f_\beta(x_1)\neq f_\beta(x_2)=f(x_2)$, לכן $(A,f)\in T$. ולכן לכל $\alpha\in I$ $(A_\alpha, f_\alpha)\le (A,f)$ כלומר לכל שרשרת ב T יש חסם מלעיל ולפי הלמה של צורן יש ב T איבר מקסימאלי נסמנו ב (A_0, f_0).

יש שתי אפשרויות:

1. $A_0 = X$ ואז $f_0: X\to Y$ חח"ע ולכן $|X|\le|Y|$.
2. אם $A_0\subset X$. נוכיח שבמקרה זה f_0 פונקציה על: קיים $x_0\in X\setminus A_0$ אם f_0 לא על נבחר $y_0\in Y\setminus f_0[A_0]$ ונרחיב את f_0 לפונקציה $f_1: A_0\cup\{x_0\}\to Y$ ע"י $f_1(x)=\begin{cases} y_0 & x=x_0 \\ f_0(x) & x\in A_0\end{cases}$.

מכיוון ש $f_0: A_0\to Y$ חח"ע גם $f_1: A_0\cup\{x_0\}\to Y$ חח"ע ו $(A_0, f_0)\le (A_1, f_1)\wedge (A_0, f_0)\neq (A_1, f_1)$ בסתירה למקסימאליות של (A_0, f_0) ולכן $f_0: A_0\to Y$ על ומתקיים $|Y|\le|X|$.

<u>משפט המכפלה</u>

אם X קבוצה אינסופית אזי $|X\times X|=|X|$.

<u>הוכחה</u>

נגדיר קבוצה $T=\{(A,f) \mid A\subseteq X$ אינסופית : $f: A\times A\to A$ פו' חח"ע ועל $\}$.

$T\neq\varnothing$ מכיוון ש X קבוצה אינסופית ולכן מכילה קבוצה בת מניה $D\subseteq X$ ז"א $|A|=\aleph_0$ והוכחנו ש $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$, ולכן קיימת פונקציה $h: D\times D\to D$ ז"א $(D,h)\in T$. נגדיר יחס סדר על T באופן הבא: $(A_1, f_1)\le (A_2, f_2)$ אם $A_1\subseteq A_2 \wedge f_2|_{A_1\times A_1} = f_1$ נשים לב ש $(T,\le)$ קבוצה סדורה חלקית. תהיי $\{(A_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ שרשרת. נגדיר (A,f) באופן הבא: $A=\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ ו $f: A\times A\to A$ מוגדרת ע"י לכל $(a,b)\in A\times A$ $f(a,b)=f_\alpha(a,b)$ מכיוון ש $A=\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ קיימים $\alpha,\beta\in I$ כך ש $a\in A_\alpha\wedge b\in A_\beta$ מכיוון ש $\{(A_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ שרשרת ניתן להניח ב.ה.ג.כ. ש $A_\beta\subseteq A_\alpha$ ז"א קיים $\alpha\in I$ כך ש $a,b\in A_\alpha$.

הפונקציה מוגדרת היטב מכיוון ש $\{(A_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ שרשרת.

f חח"ע – נניח ש $(a_2,b_2)\neq(a_1,b_1)$ מכיוון ש $\{(A_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ שרשרת קיים $\alpha\in I$ כך ש $(a_2,b_2),(a_1,b_1)\in A_\alpha\times A_\alpha$ ומכיוון ש f_α חח"ע נקבל ש $f(a_2,b_2)=f_\alpha(a_2,b_2)\neq f_\alpha(a_1,b_1)=f(a_1,b_1)$.

f על – יהי $a\in A$ מכיוון ש $A=\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ קיים $\alpha\in I$ כך ש $a\in A_\alpha$ מכיוון ש f_α פונקציה על קיימים $a_1,a_2\in A_\alpha$ כך ש $f(a_1,a_2)=f_\alpha(a_1,a_2)=a$. סה"כ קיבלנו ש $(A,f)\in T$. מהגדרת (A,f) נקבל שלכל $\alpha\in I$ $(A_\alpha, f_\alpha)\le(A,f)$ ולכן (A,f) חסם מלעיל של השרשרת ב T לפי הלמה של צורן קיים

איבר מקסימאלי נסמנו ב (B,g) ב T כלומר $g:B\times B\to B$ פונקציה חח"ע ועל ז"א $|B|\cdot|B|=|B|$

נוכיח ש $|B|=|X|$.

מקרה 1: $|X\setminus B|\le|B|$.

$$|B|\le|X|=|B\cup(X\setminus B)|=|B|+|X\setminus B|\le|B|+|B|=2\cdot|B|\le|B|\cdot|B|=|B|$$

השוויון הראשון נובע מכיוון ש $B\subseteq X$. השוויון השני נובע מכיוון ש $X=B\cup(X\setminus B)$.

השוויון השלישי נובע מהגדרת חיבור עוצמות ומכיוון שהקבוצות $B,(X\setminus B)$ זרות.

האי שוויון הראשון נובע מכיוון ש $|X\setminus B|\le|B|$ ובנוסף הראינו שאם k_1,k_2,k_3,k_4 עוצמות כך ש $k_1\le k_2\wedge k_3\le k_4$ אז $k_1+k_3\le k_2+k_4$.

השוויון הרביעי נובע מכיוון ש $|B|\cdot 2=|B\times\{0,1\}|=|B\times\{a\}\cup B|=|B|+|B|$ שימו לב שקיים a שעבורו הקבוצה $B\times\{a\}$ והקבוצה B זרות וזאת מכיוון ש $|B|<|P(B)|$.

האי שוויון השני נובע מכיוון שאם k_1,k_2,k_3,k_4 עוצמות כך ש $k_1\le k_2\wedge k_3\le k_4$ אז $k_1\cdot k_3\le k_2\cdot k_4$.

וממשפט קנטור ברנשטיין קיבלנו ש $|B|=|X|$.

מקרה 2: $|B|<|X\setminus B|$ (ממשפט השוואת עוצמות נקבל שאין יותר מקרים.

מכיון ש $|B|<|X\setminus B|$ קיימת קבוצה $B'\subseteq X\setminus B$ כך ש $|B|=|B'|$ (נשים לב ש B,B' קבוצות זרות)

$|B'|=|B|=|B\times B|=|B'\times B'|=|B'\times B|=|B\times B'|$.

$$|B'|=3\cdot|B'\times B'|\Leftarrow|B'|=|B'\times B'|=3\cdot|B'|=3\cdot|B'\times B'|\Leftarrow|B'\times B'|=|B'|\le 3\cdot|B'|\le|B'\times B'|$$

ואז כמו מקודם ניתן להראות ש $|B'|=|B'\times B|+|B\times B'|+|B'\times B|$

ז"א קיימת פונקציה חח"ע ועל $h:(B'\times B)\cup(B\times B')\cup(B'\times B')\to B'$.

נגדיר פונקציה $t:(B\cup B')\times(B\cup B')\to B\cup B'$ באופן הבא

$$t(x,y)=\begin{cases} g(x,y) & (x,y)\in B\times B \\ h(x,y) & otherwise \end{cases}.$$

מכיוון שכל הקבוצות $(B'\times B),(B\times B'),(B'\times B'),(B\times B)$ זרות הפונקציה מוגדרת היטב ומכיוון ש g,h חח"ע ועל t חח"ע ועל קיבלנו ש $(B\cup B',t)\in T$ בסתירה למקסימאליות של (B,g).

<u>מסקנות</u>

אם k_1,k_2 עוצמות אינסופית אז

1. $k_1\cdot k_2=\max\{k_1,k_2\}$.
2. $k_1+k_2=\max\{k_1,k_2\}$.