

### תרגיל 10 אינפי 3

#### שאלה 1

תהי

$$f(x, y, z) = (e^x \sin z, e^y \cos z, e^z xy)$$

הוכח כי  $f$  הפיכה מקומית ב  $(0, 1, 0)$  ומצא את מטריצת יעקובי של  $f^{-1}$  בנקודה  $(0, e, 0)$ .

#### שאלה 2

נגדיר את הפונקציה

$$f(x, y) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

1. הוכח כי  $f$  דיפרנציאבילית בקטע הפתוח  $(-1, 1)$  וכי  $f'(0) \neq 0$ .
2. הוכח כי  $f$  אינה חד חד ערכית בכל קטע פתוח המכיל את 0. הצעה לפתרון: הוכח ראשית כי עבור כל  $k \in \mathbb{N}$  מתקיים

$$f\left(\frac{2}{(4k+1)\pi}\right) > f\left(\frac{2}{(4k+3)\pi}\right) < f\left(\frac{2}{(4k+4)\pi}\right)$$

3. איזה תנאי מתנאי משפט הפונקציה ההפוכה לא מתקיים כאן? (הרי מסקנת המשפט לא מתקיימת). בדוק בצורה מפורשת שהוא לא מתקיים.

#### שאלה 3

מצאו את המרחק הקצר ביותר בין  $(0, 0)$  לנקודה כלשהיא על ההיפרבולה

$$7x^2 + 8xy + y^2 = 45$$

#### שאלה 4

מצא את נקודות הקיצון הגלובאליות של הפונקציה  $f(x, y) = x + y$  על הקבוצה

$$D = \{(x, y) \mid xy \geq 4, \quad x + 2y \leq 9, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$$

## שאלה 5

נתון מישור (למעשה זה נקרא היפר-מישור) ב  $\mathbb{R}^n$  על ידי המשוואה

$$C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n + D = 0$$

כאשר  $C_1, \dots, C_n, D \in \mathbb{R}$  ו  $(C_1, \dots, C_n)$  היא מטריצה מדרגה 1 (כלומר לפחות אחד מה  $C_i$  הוא לא 0).

נתונה נקודה  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ . מצא (בעזרת שיטת כופלי לגרנז') את מרחק הנקודה מהמישור.

תזכורת: מרחק הנקודה  $a$  מקבוצה  $A$  הוא

$$\inf\{\|x - a\| \mid x \in A\}$$

## שאלה 6

מה צריכים להיות האורך הרוחב והגובה של תיבה בעלת שטח פנים מינימאלי שנפחה  $S$ ? הוכח.

## שאלה 7

מצא את המקסימום והמינימום הגלובאליים של

$$f(x, y, z) = xy + yz$$

תחת האילוצים

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y^2 + z^2 = 4$$