# פתרון מבחן מועד ג' – 86-147 חדו"א 1 לאודיסאה – 17/05/23

מרצה: דר' ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

<u>יש לכתוב את התשובות על גבי טופס המבחן במקום המתאים בלבד. מותר לכתוב משני צידי הדף.</u>

<u>מחברות הטיוטה מושלכות ולא תבדקנה.</u>

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)\cdot\tan(3x)}{x^3-x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\frac{1}{\cos(3x)}\cdot 3\cdot\frac{1}{x-1}=1\cdot 1\cdot 1\cdot 3\cdot(-1)=-3$$

ב. $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+\sin(x)}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}\cdot\frac{1}{1+\underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\text{חסומה חלקי אינסוף}}}=1$$

ג. $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n+1}-n$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{\sqrt{n^2+n+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n+1)-n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

2.

א. חשבו את $\int\cos(x)\,e^{2\cdot\sin(x)}\,dx$.

$$\int\cos(x)\,e^{2\sin(x)}dx=\left\{\begin{matrix} t=2\sin(x)\\ dt=2\cos(x)\,dx\\ \frac{1}{2}dt=\cos(x)\,dx\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\int e^t dt=\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^{2\sin(x)}+C$$

ב. חשבו את האינטגרל הבא $\int_0^\infty \frac{\sin(e^{-x})}{e^x}dx$.

$$\int_0^\infty \frac{\sin(e^{-x})}{e^x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{\sin(e^{-x})}{e^x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \sin(e^{-x})\,e^{-x}dx = \left\{\begin{matrix} u = e^{-x} \\ du = -e^{-x}dx \end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} -\int_1^{e^{-t}} \sin(u)\,du = \lim_{t\to\infty}\cos(e^{-t}) - \cos(1) = 1 - \cos(1)$$

.3

א. מה הערך המינימלי של הפונקציה $f(x) = \ln^2(x-1)$.

ראשית כדאי לשים לב לתחום ההגדרה $x > 1$

$$f'(x) = 2\ln(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}$$

סימן הנגזרת נקבע ע"י הלוג, שהוא חיובי כאשר $x > 2$ ושלילי בתחום $1 < x < 2$

לכן הפונקציה עולה בתחום $[2,\infty)$ ויורדת בתחום $(1,2]$

והערך המינימלי הגלובאלי שלה מתקבל בנקודה $x = 2$ ולכן הוא שווה ל

$$f(2) = 0$$

ב. מצאו לכל ערך של $a$ כמה פתרונות יש למשוואה $\ln^2(x-1) = a$.

מסעיף א', לכל $a < 0$ אין פתרון למשוואה.

עבור $a = 0$ יש פתרון יחיד למשוואה והוא $x = 2$

לכל $a > 0$ צריך לפתור.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = \ln^2(x-1) - a$$

תחומי העלייה והירידה שלה זהים לסעיף א' כי $h' = f'$

$$h(2) = -a < 0$$

כיוון שאי אפשר להציב את הקצוות האחרים $1,\infty$ נחשב גבולות

$$\lim_{x\to1^+}\ln^2(x-1) - a = \{(-\infty)^2 - a\} = \infty$$

לכן יש נקודה חיובית בתחום $(1,2]$ ולפי משפט ערך הביניים כיוון שהפונקציה רציפה כצירוף רציפות יש נקודת חיתוך בתחום $(1,2)$ בין הנקודה החיובית לנקודה השלילית. אין יותר מחיתוך אחד בתחום זה כיוון שהפונקציה מונוטונית בתחום זה.

באופן דומה

$$\lim_{x\to\infty} \ln^2(x-1) - a = \infty$$

ויש חיתוך נוסף בתחום $(2,\infty)$ וסה"כ יש בדיוק שני חיתוכים, כלומר שני פתרונות למשוואה המקורית.

הערה: בתרגיל זה, בטעות מחבר המבחן, ניתן לפתור את השאלה באופן אלגברי לחלוטין, תשובה זו הייתה מקבלת את מלוא הנקודות.

4. תהיינה $f, g$ פונקציות כך ש $f$ גזירה ב$x = 0$, $f(0) = 0$ וכן $g$ <u>אינה</u> גזירה ב$x = 0$.

א. הוכיחו או הפריכו: הפונקציה $h(x) = f(x) + g(x)$ אינה גזירה ב$x = 0$.

$h$ גזירה באפס אם גבול שיפועי המיתרים קיים וסופי

$$\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)-f(0)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}_{\to f'(0)} + \underbrace{\frac{g(x)-g(0)}{x-0}}_{\text{אין גבול סופי}}$$

סכום ביטויים שלאחד מהם יש גבול סופי ולשני אין גבול סופי, הוא ביטוי שאין לו גבול סופי.

הוכחה להערה האחרונה (אוכיח בסדרות, אבל ההוכחה בפונקציות דיי זהה):

נב"ש כי $a_n \to L \in \mathbb{R}$ וכן לסדרה $b_n$ אין גבול וכן $a_n + b_n \to M \in \mathbb{R}$

$$b_n = a_n + b_n - a_n \to M - L \in \mathbb{R}$$

בסתירה לכך שלסדרה $b_n$ אין גבול.

ב. הוכיחו או הפריכו: הפונקציה $h(x) = g\big(f(x)\big)$ אינה גזירה ב$x = 0$.

הפרכה:

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = |x|$$

מקיימות את הנתונים אבל

$$h(x) = g\big(f(x)\big) = |x^2| = x^2$$

שהיא אכן גזירה ב$x = 0$.

5. תהי סדרה $a_n$ המקיימת לכל $n$ כי $a_{n+1} = 2a_n - 3$.

א. קבעו והוכיחו לכל ערך של $a_1$ האם הסדרה מונוטונית עולה או מונוטונית יורדת.

נביט בהפרש

$$a_{n+1} - a_n = a_n - 3$$

אם $a_n > 3$ לכל $n$ הסדרה עולה, אם $a_n < 3$ לכל $n$ הסדרה יורדת, ואם $a_n = 3$ לכל $n$ הסדרה קבועה כלומר עולה ויורדת.

שימו לב: מי אמר שאחת משלושת האופציות בכלל מתקיימת? כלומר ייתכן שלפעמים הסדרה גדולה מ3, ולפעמים קטנה מ3.

נוכיח באינדוקציות שהאיבר הראשון קובע את כל הסדרה באופן הבא:

נניח $a_1 > 3$ ונוכיח כי לכל $n$ מתקיים כי $a_n > 3$ (ולכן הסדרה עולה)

בדיקה: הנחנו כי $a_1 > 3$. יהי $n$ עבורו $a_n > 3$ לכן

$$a_{n+1} = 2a_n - 3 > 6 - 3 = 3$$

עם הוכחה דומה מטפלים גם במקרים האחרים ורואים שאם $a_1 < 3$ כל הסדרה קטנה מ3 ולכן יורדת ואם $a_1 = 3$ הסדרה קבועה 3.

ב. מצאו את גבול הסדרה לכל ערך של $a_1$.

עבור $a_1 = 3$ ברור כי גבול הסדרה הוא 3.

עבור $a_1 < 3$ הסדרה יורדת ולכן חסומה ומתכנסת לגבול סופי, או שאינה חסומה ושואפת לאינסוף.

**<u>אם</u>** הסדרה חסומה היא מתכנסת ונסמן $a_n \to L \in \mathbb{R}$

נשאיף את שני צידי נוסחת הנסיגה

$$\lim a_{n+1} = \lim 2a_n - 3$$

$$L = 2L - 3$$

$$L = 3$$

כיוון שהסדרה יורדת, $L \leq a_1 < 3$ בסתירה.

לכן הסדרה אינה חסומה, ולכן $a_n \to -\infty$

אם $a_1 > 3$ אז באופן דומה אפשר להוכיח כי $a_n \to \infty$

6.

א. חשבו את גבול הסדרה

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n}$$

זו סדרת סכומי רימן של הפונקציה $f(x) = x$ הרציפה בקטע $[0,1]$ ולכן לפי המשפט מהכיתה סדרת סכומי הרימן מצורה זו מתכנסת לאינטגרל המסויים

$$a_n \to \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

ב. קרבו את $\sqrt{15}$ עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{100}$.

נקרב באמצעות טיילור את הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$ סביב נקודת ההשקה המצוייה $x_0 = 16$ בנקודה הרצוייה $x = 15$

ננחש $n = 4$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\left(\sqrt{x}\right)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8\left(\sqrt{x}\right)^5}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{16\left(\sqrt{x}\right)^7}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{105}{32}x^{-\frac{9}{2}} = \frac{105}{32\left(\sqrt{x}\right)^9}$$

כעת לפי לגראנז' קיימת נקודה $15 < c < 16$ עבורה השארית היא

$$R_4 = \frac{f^{(5)}(c)}{5!}(15-16)^5 = \frac{105}{5! \cdot 32\left(\sqrt{c}\right)^9} \cdot (-1)$$

לכן

$$|R_4| = \frac{105}{120 \cdot 32} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{c}\right)^9} < \frac{105}{120 \cdot 32} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{15}\right)^9}$$

כיוון שהקטנו את המכנה, הגדלנו את הביטוי.

שימו לב, אסור להציב את הביטוי הזה במחשבון, הרי מלכתחילה $\sqrt{15}$ הוא מה שאין אנו יודעים.

נקטין עוד יותר את המכנה לכיוון ביטוי בר חישוב

$$|R_4| < \frac{105}{120 \cdot 32} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{9}\right)^9} = \frac{105}{120 \cdot 32} \cdot \frac{1}{3^9} < \frac{1}{100}$$

לכן $n = 4$ מתאים, וכעת נחשב את פולינום טיילור על מנת למצוא את הקירוב.

$$P_4(x) = f(16) + f'(16)(x-16) + \cdots + \frac{f^{(4)}(16)}{4!}(x-16)^4$$

כיוון שבכל הנגזרות מופיע $\sqrt{16} = 4$ אנחנו יודעים לחשב אותן כמספר רציונאלי, כעת נציב:

$$P_4(x) = 4 + \frac{1}{8}(x-16) - \frac{\frac{1}{4 \cdot 4^3}}{2!}(x-16)^2 + \frac{\frac{3}{8 \cdot 4^5}}{3!}(x-16)^3 - \frac{\frac{15}{16 \cdot 4^7}}{4!}(x-16)^4$$

וסה"כ הקירוב שלנו הוא

$$\sqrt{15} \approx 4 + \frac{1}{8}(15-16) - \frac{\frac{1}{4 \cdot 4^3}}{2!}(15-16)^2 + \frac{\frac{3}{8 \cdot 4^5}}{3!}(15-16)^3 - \frac{\frac{15}{16 \cdot 4^7}}{4!}(15-16)^4$$