פונקציות מדידות

תזכורת: אם (X,S) מרחב מדיד, נאמר ש$f:X\to\mathbb{R}^*=[-\infty,\infty]$ הינה מדידה(מדידה בS) אם מתקיים אחד מהתנאים הבאים:

I. לכל $\alpha\in\mathbb{R}$, $\{x\in X|f(x)>\alpha\}\in S$

II. לכל $\alpha\in\mathbb{R}$, $\{s\in X|f(x)\geq\alpha\}\in S$

III. לכל $\alpha\in\mathbb{R}$, $\{s\in X|f(x)<\alpha\}\in S$

IV. לכל $\alpha\in\mathbb{R}$, $\{s\in X|f(x)\leq\alpha\}\in S$

תרגיל

האם הפונקציה הבאה הינה מדידה <u>בורל</u>?

$$T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\qquad T(x)=\begin{cases}\sin 2x & x>0\\ 1+\cos x & x\leq 0\end{cases}$$

פתרון

בהרצאה נאמר $E\in S$ (E מדידה) $\iff$ $I_E:X\to\mathbb{R}$ [1] מדידה(S).
נגדיר את הפונקציות הבאות:

$$f(x)=I_{(0,\infty)}(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\infty\\ 0 & x\leq 0\end{cases}\qquad g(x)=I_{(-\infty,0]}(x)=\begin{cases}1 & -\infty<x\leq 0\\ 0 & x>0\end{cases}$$

הקבוצה $(0,\infty)$ פתוחה ולכן מדידה בורל($(0,\infty)\in B$). הקבוצה $(-\infty,0]$ היא סגורה ולכן גם היא מדידה בורל.

הבחנה:
- אומרים על קבוצה E שהיא מדידה אם כהיא נמצאת בσ אלגברה המדוברת.
- אומרים על פונקציה שהיא מדידה אם היא מקיימת תנאים $\mathrm{I}-\mathrm{IV}$.

ע"פ הטענה מההרצאה, האינדיקטורים של קבוצות אלו $f(x),g(x)$ הן פונקציות מדידות. ניתן לרשום

$$T(x)=\sin(2x)\cdot f(x)+(1+\cos x)\,g(x)$$

$\sin(2x)$ ו$(1+\cos x)$ הן פונקציות מדידות כי הן רציפות. $T(x)$ נוצרת ע"י חיבור וכפל בין פונקציות מדידות ולכן היא מדידה.

[1] I_E היא פונקציית האינדיקטור $I_E(x)=\begin{cases}1 & x\in E\\ 0 & x\notin E\end{cases}$

הגדרה

נאמר כי הפונקציה $f : E \to \mathbb{R}^*$ מדידה אם לכל $\alpha \in \mathbb{R}$, $\left\{ x \in E \,\middle|\, f(x) \begin{array}{c} > \\ < \\ \geq \\ \leq \end{array} \alpha \right\} \in S$ (אלו תנאים $\mathrm{I} - \mathrm{IV}$ ביחד).

תרגיל

תהי f פונקציה בעלת תחום מדיד $D \subseteq \mathbb{R}$. הראו כי f מדידה אם ורק אם הפונקציה g המוגדרת ע"י $g(x) = f(x)$ לכל $x \in D$ ו-$g(x) = 0$ לכל $x \notin D$ מדידה.

פתרון

$\Leftarrow$ נניח כי f מדידה. אם $\alpha > 0$ אזי $\{x | g(x) > \alpha\} = \{x | f(x) > \alpha\}$ וזו מדידה, ואם $\alpha \leq 0$ אזי $\{x | g(x) > 0\} = \{x | f(x) > \alpha\} \cup D$ וזו קבוצה מדידה כאיחוד של קבוצות מדידות.

$\Longrightarrow$ נניח כי g מדידה. אזי $f(x) = g(x)|_D$, וצמצום של פונקציה מדידה לתוך קבוצה מדידה הוא מדיד.

■

תזכורת

הגדרנו בהרצאה פונקציות אינדיקטור ופונקציות פשוטות.

פונקציה פשוטה היא פונקציה מהצורה $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k I_{E_k}$ באשר a_k קבועים ממשיים ו-E_k הן קבוצות מדידות.

אם לא נאמר אחרת, ההצגה קנונית(כלומר ה-a_k שונים זה מזה ו-$E_k = \{x | \varphi(x) = a_k\}$).

בהרצאה הוגדר גם האינטגרל של פונקציה פשוטה:

$$\int_X \varphi(x)\, \mathrm{d}\mu := \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k)$$

תרגיל

תהי E קבוצה מדידה עם מידה 0. הראו כי אם $f : E \to \mathbb{R}$ פשוטה אזי f מדידה לבג(כפונקציה) ו-$\int_E f\, \mathrm{d}m = 0$ כאשר m היא מידת לבג.

פתרון

לכל $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\{x \in E | f(x) \leq \alpha\} \subseteq E$$

$$0 \leq m(\{x \in E | f(x) \leq \alpha\}) \leq m(E) = 0$$

ע"פ משפט מההרצאה אם לקבוצה F יש מידת לבג(חיצונית) 0, אזי $F \in \mathscr{L}$(F קבוצה מדידה לבג), ולכן לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ $\{x \in E | f(x) \leq \alpha\}$ מדידה(לבג).
כמו כן, f פשוטה ולכן ניתן לרשום:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot I_{E_k}$$

כאשר E_k קבוצות מדידות ו$\bigcup_{k=1}^{n} E_k = E$. נסמן $M = \max_{1 \leq k \leq n} |c_n|$ ונקבל:

$$\left|\int_E f \, \mathrm{d}m\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} c_k m(E_k)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} M \cdot m(e_k) = M \sum_{k=1}^{n} m(E_k) = M \cdot m(E) = 0$$

הראנו ש$0 \leq \left|\int_E f \, \mathrm{d}m\right| \leq 0$, ולכן $\int_E f \, \mathrm{d}m = 0$.

טענה

1. כל $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מדידה וחסומה, הינה גבול של סדרת פונקציות פשוטות המתכנסות אליה במ"ש.
2. אם $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ מדידה, אזי קיימת סדרה עולה של פונקציות פשוטות $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \varphi_3 \leq \cdots$[2] כך ש$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = f$.

הוכחה

1. נניח(כרגע) כי הטווח של f הוא $[0, \infty)$(בעתיד נטפל גם בפונקציות שליליות). כעת, נניח כי N הינו השלם הראשון כך ש$N > \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x)$. לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר:

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{N \cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} \cdot I_{E_{n,k}}$$

כאשר $E_{n,k} = f^{-1}\left(\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]\right)$.
בלשון בני אדם: בונים את φ_n באופן הבא:

א. מחלקים את הקטע $[0, N]$ ל$N \cdot 2^n$ קטעים, שווים באורכם.

[2] הכוונה $\forall_x \forall_n \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$

ב. מעגלים את f כלפי מטה אל קצה הקטע הקרוב.

($\varphi_{n+1}(x)=\sum_{k=1}^{N\cdot2^{n+1}}\frac{k-1}{2^{n+1}}I_{E_{n+1,k}}$)

טענה: לכל x ממשי, $\varphi_n(x)\leq\varphi_{n+1}(x)$.

הוכחה:

$$\varphi_n(x)=\frac{k-1}{2^n}\iff x\in E_{n,k}\iff$$

$$\iff f(x)\in\left[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right)=\left[\frac{2(k-1)}{2^{n+1}},\frac{2k}{2^{n+1}}\right)\iff$$

$$\iff f(x)\in\underbrace{\left[\frac{2k-2}{2^{n+1}},\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right)}_{=E_{n+1,2k-1}}\quad\vee\quad f(x)\in\underbrace{\left[\frac{2k-1}{2^{n+1}},\frac{2k}{2^{n+1}}\right)}_{=E_{n+1,2k}}\iff$$

$$\iff\varphi_{n+1}(x)=\frac{k-1}{2^n}\quad\vee\quad\varphi_{n+1}(x)=\frac{k-\frac{1}{2}}{2^n}$$

בכל מקרה $\varphi_n(x)\leq\varphi_{n+1}(x)$.

(ברור כי לכל n, $\varphi_n\leq f$).

במ"ש: נראה כי לכל n ולכל $x\in\mathbb{R}$, $|f(x)-\varphi_n(x)|\leq\frac{1}{2^n}$. ניקח $x\in\mathbb{R}$. אזי $x\in E_{n,k}$ יחידה לאיזשהו $1\leq k\leq N\cdot2^n$, כלומר $f(x)\in\left[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right)$, ואז

$$|f(x)-\varphi_n(x)|=f(x)-\varphi_n(x)=f(x)-\frac{k-1}{2^n}<\frac{k}{2^n}-\frac{k-1}{2^n}=\frac{1}{2^n}$$

ע"פ קריטריון הsup להתכנסות - הוכחנו שזה במ"ש.

■