בקשר לש"ב בxi:
הוספתי כפתור "הגש שאלה" בסוף כל שאלה.
הוא שומר את התשובה, וגם מראה אם צדקתם או לא (לא מה התשובה הנכונה).
בסוף התרגיל- ללחוץ "סיים בוחן".
שימו לב: כשיש לכם תרגיל בxi- למעשה זה תרגיל רגיל. אני ממליצה לכם להתעלם מההדרכות ופשוט לפתור את התרגיל על דף בצורה רגילה.
מועד הגשה- התרגילים פתוחים עד סוף סמסטר, אבל מומלץ לעשות בכל שבוע.
מקבלים את הציון הגבוה מבין כל ההגשות.
כפל מטריצות:
תזכורת: יהיו A, B מטריצות. ניתן להכפיל AB רק אם מספר העמודות של A שווה למספר השורות של B.
כלומר:

$$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times k}$$

נקבל מטריצה עם m שורות וk עמודות.

$$AB \in \mathbb{R}^{m\times k}$$

$$(AB)_{i,j} = R_i(A) \cdot C_j(B)$$

ראינו שייתכן שAB מוגדר (כלומר, אפשר להכפיל בכיוון הזה) אבל BA לא מוגדר.
בנוסף, ראינו שייתכן שAB וBA מוגדרים, אבל מגדלים שונים.
דוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

מסקנה: AB לא בהכרח שווה לBA.
בכפל מטריצות, הסדר משנה.
הערה:

$$A(BC) = (AB)C$$

כלומר, כשמכפילים כמה מטריצות ברצף, נחלק אותם לזוגות באופן כלשהו, ונכפיל כל זוג. זה לא משנה איך נעשה את זה, התוצאה תהיה אותו דבר. (אבל בשום אופן אסור להחליף את הסדר!)

דוגמא:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$$

רוצים לחשב:

$$ABC$$

דרך אחת:

$$(AB)C=\begin{pmatrix}3&3\\7&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0\\14&0\end{pmatrix}$$

$$A(BC)=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0\\14&0\end{pmatrix}$$

מציאת שורה ועמודה במכפלה:

$$R_i(AB)=R_i(A)B$$

$$C_i(AB)=AC_i(B)$$

דוגמאות:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\-1&2&0\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$R_1(AB)=?$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}$$

$$C_2(AB)=?$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\-1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

תכונה של כפל מטריצה בוקטור עמודה:

נניח ש$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$A\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$$

$$= v_1C_1(A) + v_2C_2(A) + ... + v_nC_n(A)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

באופן דומה:

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix} A = v_1R_1(A) + v_2R_2(A) + ... + v_nR_n(A)$$

הקשר בין מערכות משוואות לכפל מטריצות:

נניח שיש לנו מערכת משוואות מהצורה

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

פיתרון למערכת הוא בעצם וקטור של מספרים

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

שכשמציבים בתוך המערכת מקבלים שוויון.

למדנו שאפשר להעביר את המערכת למטריצה.

עכשיו אנחנו רוצים להמיר בצורה שונה. למטריצת המקדמים, ולוקטור התוצאה.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

זאת מטריצת המקדמים.

וקטור התוצאה:

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

נסתכל על המשוואה הבאה:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$$

כלומר, A ו-b נתונים. אנחנו מחפשים וקטור $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ שיקיים את השוויון.

לפתור את המערכת

$$Ax = b$$

זה בדיוק כמו לפתור את מערכת המשוואות שהתחלנו איתה.

כלומר, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ פותר את המערכת $Ax = b$, אם ורק אם הוא מהווה פתרון למערכת המשוואות המקורית.

דוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

איך פותרים?

נחשב את הכפל:

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$$

כלומר, המשוואה אומרת שהוקטור שקיבלנו שווה לוקטור

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases}$$

שחלוף ($transpose$):
תהי $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, השחלוף של A היא מטירצה שמסומנת A^t או A^T, ומוגדרת כך:

$$A^t \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

$$(A^t)_{i,j} = A_{j,i}$$

לדוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

תכונות:
1. $(\alpha A)^t = \alpha(A^t)$
2. $(A+B)^t = A^t + B^t$
הוכחה: $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
אז $A + B \in \mathbb{R}^{m\times n}$
$(A+B)^t \in \mathbb{R}^{n\times m}$.
$A^t, B^t \in \mathbb{R}^{n\times m}$
$A^t + B^t \in \mathbb{R}^{n\times m}$.
קיבלנו ששתי המטריצות מאותו גודל. כעת נשווה רכיבים.

$$(A+B)^t_{i,j} = (A+B)_{j,i} = A_{j,i} + B_{j,i} = A^t_{i,j} + B^t_{i,j} = (A^t + B^t)_{i,j}$$

3. $(A^t)^t = A$
הוכחה: נניח $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$
$A^t \in \mathbb{R}^{n\times m}$
$(A^t)^t \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

$$(A^t)^t_{i,j} = A^t_{j,i} = A_{i,j}$$

4. $(AB)^t = B^t A^t$

$$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times k}, AB \in \mathbb{R}^{m\times k}$$

$$A^t \in \mathbb{R}^{n\times m}, B^t \in \mathbb{R}^{k\times n}$$

הגדרה: מטריצה נקראת סימטרית אם היא שווה לשחלוף שלה. כלומר, A סימטרית אם $A = A^t$.
ומטריצה נקראת אנטי סימטרית אם $A = -A^t$.
הבחנה: אם A סימטרית או אנטי סימטרית, אז בהכרח יש לה אותו מספר שורות ועמודות.
מטריצה עם אותו מספר שורות ועמודות נקראת "מטריצה ריבועית".
דוגמאות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

זאת מטריצה סימטרית.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

זאת מטריצה שהיא גם סימטרית וגם אנטיסימטרית. היא נקראת "מטריצת האפס".

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

זאת מטריצה אנטי סימטרית.
טענה: הוכיחו שבמטריצה אנטיסימטרית, איברי האלכסון חייבים להיות 0.
הוכחה: תהי A מטריצה אנטיסימטרית. כלומר

$$A = -A^t$$

איבר באלכסון הוא איבר במיקום i, i.

$$A^t_{i,i} = A_{i,i}$$

לפי הגדרת שחלוף.
מנגד מכיוון ש$A = -A^t$

$$A^t_{i,i} = -A_{i,i}$$

קיבלנו ש

$$A_{i,i} = -A_{i,i}$$

ולכן

$$A_{i,i} = 0$$

סימון: תהי A מטריצה. כשתכתוב

$$A^n$$

הכוונה ל

$$A \cdot A \cdots A$$

n פעמים. (כמובן, בתנאי שהכפל מוגדר).

מטריצות ריבועיות

באוסף המטריצות הריבועיות מגודל $n \times n$ מתקיים שהמטריצה

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מטריצה שבה כל איברי האלכסון שווים 1, וכל שאר האיברים שווים ל0, היא נטרלית לכפל. כלומר, לכל A כך שהכפל מוגדר מתקיים:

$$AI = A$$

או

$$IA = A$$

(תלוי מאיזה כיוון הכפל מוגדר). אם הכפל מוגדר משני הכיוונים, אז זה מתקיים משני הכיוונים.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$