<u>משפט הצירים המקבילים</u>

① משפט שטיינר של טנזור מומנט התמד עבור מס' צירים שהראשית שלו במרכז מסה נבחר ראשית חדשה
המסה (נמצ.) במקום X,Y,Z אז הטנזור הוא:

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_{xx}^{c.m.}+M(Y^2+Z^2) & I_{xy}^{c.m.}-Mxy & I_{xz}^{c.m.}-Mxz \\ I_{yx}^{c.m.}-Mxy & I_{yy}^{c.m.}+M(X^2+Z^2) & I_{yz}^{c.m.}-Myz \\ I_{zx}^{c.m.}-Mxz & I_{zy}^{c.m.}-Myz & I_{zz}^{c.m.}+M(X^2+Y^2) \end{pmatrix}$$

<u>הרצאה 9:</u> <u>מכניקה המילטוניאנית:</u>

$$L(q_1,q_2,\dots q_n,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\dots\dot{q}_n)$$

$$\forall i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

עבור q_i ציקלית $p_i = const$.

$$\frac{d}{dt}(\underbrace{p\dot{q}-L}_{})=0$$

אנרגיה כללית של הבעיה.

$$L \rightarrow$$ פונקציה אחרת

שתהיה פונקציה מקואורדינטות ותנעים מוכללים.

<u>טרנספורם Legendre:</u> $f(x,y)$ $(x,y)\rightarrow(u,y)$

דיפרנציאל של $f(x,y)$ $\rightarrow$ $df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$

$$df(x,y) = u\,dx + V\,dy$$

$$g := f - ux$$

$$dg = d(f-ux) = df - d(ux) = u\,dx + V\,dy = u\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$
$$-x\,du - u\,dx = -x\,\underline{\underline{du}} + \frac{\partial f}{\partial y}\underline{\underline{dy}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \rightarrow x(u,y)$$

$L(q,\dot{q},t)$ שגין

$\hookrightarrow H(q,p,t) \leftarrow$ Hamiltonian

$$H(q,p,t)=\dot{q}p-L(q,\dot{q},t)$$

$$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \longrightarrow \dot{q}(p,q,t)$$

$$dH=d(\dot{q}p-L)=p\,d\dot{q}+\dot{q}\,dp-\frac{\partial L}{\partial q}dq-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}d\dot{q}-\frac{\partial L}{\partial t}dt$$

$$=p\,d\dot{q}+\dot{q}\,dp-\frac{\partial L}{\partial q}dq-p\,d\dot{q}-\frac{\partial L}{\partial t}dt$$

$$=\dot{q}\,dp-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)dq-\frac{\partial L}{\partial t}dt$$

$$dH=\dot{q}\,dp-\dot{p}\,dq-\frac{\partial L}{\partial t}dt$$

$$dH(q,p,t)=\frac{\partial H}{\partial q}dq+\frac{\partial H}{\partial p}dp+\frac{\partial H}{\partial t}dt$$

$$\boxed{\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p},\quad -\dot{p}=\frac{\partial H}{\partial q},\quad \frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t}}$$

משוואות המילטון

$$L(q_1,\dots,q_n,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n,t)$$

$\forall i \quad p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad H=\sum_i \dot{q}_i p_i - L$

$\vdots$

$$\forall i \quad \dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i};\ -\dot{p}_i=\frac{\partial H}{\partial q_i};\ \frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t}$$

$L(q_1,\dots,q_{n-1},\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n,t)$ כשנתון

q_n לא מופיע בתוך הלגרנז'יאן

$\Downarrow$

q_n ציקלית

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}-\frac{\partial L}{\partial q}=0$$

$$p_n=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}=const$$

איך הוכח?:

$$H=(q_1,\dots,q_{n-1};p_1,\dots,p_{n-1},p_n;t)$$

$$H=\sum_i p_i\dot q_i - L$$

אין q_n אין q_n

$\Downarrow$

H לא תלוי ב-q_n.

$$H\to H(q_1,\dots,q_{n-1};p_1,\dots,p_{n-1},\mathrm{const},t)$$

$$H'(\underline{q_1},\dots,\underline{q_{n-1}},\underline{p_1}\dots\underline{p_{n-1}},\underline{t})$$

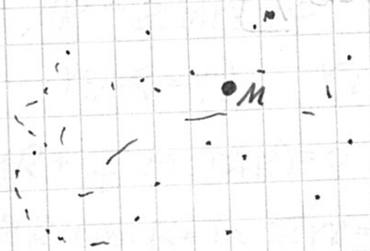
כשמעבירים $\dot q_i \to p_i$ רק עבור i כלשהו; $p_i=\mathrm{const}$

G היא פונקציית Routgh. $\leftarrow G=\sum_i p_i\dot q_i-L$

<u>דוגמה:</u> מצאו את הלגרנז'יאן ואת ההמילטוניאן של המערכת המורכבת מ-n מסות בגודל m ומסה אחת בגודל M רשמו גם המיקומים והמהירויות במערכת מרכז מסה.

$R\to$ מיקום מסה M במערכת מ.מ. (מרכז מסה)

$r_i\to$ מיקום מסה $m=m_i$ במ.מ.



$$\cancel{r_i}\to r_i-R\to r_i'$$

סה"כ המסה

$$MR+\sum_i mr_i=[\;]R_{c.m.}=0$$

$$R_{cm}=\frac{MR+\sum_i mr_i}{M+\sum_i m_i}=0$$

במערכת מ.מ.

$$0=MR+m\sum_i(r_i'+R)=MR+m\cdot nR+m\sum_i r_i$$

$$(M+nm)R=-m\sum_i r_i'$$

$$R=-\frac{m}{M+nm}\sum_i r_i'$$

$$L=\begin{pmatrix}\text{אנרגיה}\\\text{קינטית}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{אנרגיה}\\\text{פוטנציאלית}\end{pmatrix}$$

$$L=\frac12 M\dot R^2+\frac m2\sum_i \dot r_i^2-U$$

$$L_{r_i\to R+r_i'}=\frac12 M\dot R^2+\frac12 m\sum_i(\dot r_i'+\dot R)^2-U=\frac12 M\dot R^2+\frac12 m\sum_i(\dot r_i'^2+2\dot r_i'\dot R+\dot R^2)-U$$

$$=\frac12 M\dot R^2+\frac12 m\dot R^2 n+m\dot R\sum_i \dot r_i'+\frac12 m\sum_i \dot r_i'^2-U$$

$$=\frac12(M+nm)\dot R^2-\dot R^2(M+nm)+\frac12 m\sum_i \dot r_i'^2-U$$

$$\boxed{(M+nm)\dot{R} = -m\sum_i \dot{r}_i'}$$

$$= -\frac{1}{2}(M+nm)\dot{R}^2 + \frac{1}{2}m\sum_i \dot{r}_i'^2 - U$$

$$L = \frac{1}{2}m\sum_i \dot{r}_i'^2 - \frac{1}{2}(M+nm)\left[-\frac{m}{M+nm}\sum_i \dot{r}_i'\right]^2 - U$$

$$L = \underbrace{\frac{1}{2}m\sum_i \dot{r}_i'^2 - \frac{1}{2}\frac{m^2}{M+nm}\left(\sum_i \dot{r}_i'\right)^2}_{\text{אנרגיה קינטית.}} - \underbrace{U}_{\text{פוטנציאלית}}$$

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - U(q)$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m}$$

$$H = p\dot{q} - L = \frac{p}{m}\cdot p - \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 + U(q)$$

$$H = 2\left(\begin{matrix}\text{אנרגיה}\\\text{קינטית}\end{matrix}\right) - \left[\left(\begin{matrix}\text{אנרגיה}\\\text{קינטית}\end{matrix}\right) - \left(\begin{matrix}\text{אנרגיה}\\\text{פוטנציאלית}\end{matrix}\right)\right]$$

$$H = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} + U(q)$$

$$E = \begin{matrix}\text{אנרגיה}\\\text{פוטנציאלית}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{אנרגיה}\\\text{קינטית.}\end{matrix}$$

$$H = \frac{1}{2}m\sum_i \dot{r}_i^2 - \frac{1}{2}\frac{m^2}{M+nm}\left(\sum_i \dot{r}_i'\right)^2 + U$$

$$\dot{r}_i' \to p_i' \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i'} = p_i'$$

$$p_i' = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i'} = \frac{1}{2}m\cdot 2\dot{r}_i' - \frac{1}{2}\frac{m^2}{M+nm}\cdot 2\cdot\sum_j \dot{r}_j'$$

$$p_i' = m\dot{r}_i' - \frac{m^2}{M+nm}\sum_j \dot{r}_j'$$

הרצאה סופ:

המשך הפונקציה:

$$\sum_i p_i' = m\sum_i \dot{r}_i' - \frac{m^2}{M+nm}\sum_i\sum_j \dot{r}_i'$$

$$= m\sum_i \dot{r}_i' - \frac{m^2}{M+nm}n\sum_i \dot{r}_i' = \frac{m(M+nm) - m^2 n}{M+nm}\sum_i \dot{r}_i'$$

$$\sum_i p_i' = \frac{mM}{M+nm}\sum_i \dot{r}_i'$$

$$p_i' = m\dot{r}_i' - \frac{m^2}{M+nm}\left(\sum_i \dot{r}_i'\right)$$