פיתרונות לתרגיל מספר 5:

<u>תשובה 1:</u>

א. נשים לב ש : $H = \langle 5 \rangle = \{0,5,10,15\}$. מאחר ש $(\mathbb{Z}_{20}, +)$ קומוטטיבית המחלקות הימניות והשמאליות זהות והן : H, 1+H, 2+H, 3+H, 4+H.

ב. נשים לב ש : $H = \langle 8 \rangle = \{8k : k \in \mathbb{Z}\}$. מאחר ש $(2\mathbb{Z}, +)$ קומוטטיבית המחלקות הימניות והשמאליות זהות והן : H, 2+H, 4+H, 6+H.

ג. $G = (U_{11}, \cdot)$, $H = \langle 10 \rangle = \{1,10\}$. מאחר ש G קומוטטיבית המחלקות הימניות והשמאליות זהות והן :

$1 \cdot H = \{1,10$
4

ד. $G = (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $H = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}^* : x > 0\}$. מאחר ש G קומוטטיבית המחלקות הימניות והשמאליות זהות והן :
אם $a \in \mathbb{R}^+$ דהיינו $a > 0$ אזי $aH = H$ ואם $a < 0$ אזי
$aH = \{ax : x > 0\} = \{y : y < 0\} = \mathbb{R}^-$ לכן סה"כ ישנן 2 מחלקות שמאליות (וימניות)

ה. $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, $H = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. מאחר ש G קומוטטיבית המחלקות הימניות והשמאליות זהות והן :

מחלקה שמאלית של $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ב- $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ היא מהצורה $(a,b) + \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ באשר $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. שתי מחלקות $(a,b) + \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ו- $(c,d) + \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ הן שוות אם ורק אם $(a,b) - (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ דהיינו $(a-c, b-d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ז"א $a-c, b-d \in \mathbb{Z}$. מכאן נסיק שהמחלקות השונות הן $\{(a,b) + \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 0 \le a,b < 1\}$

<u>תשובה 2:</u>

<u>טענה</u>: $H \lhd G$ אם ורק אם $\forall g \in G \quad \forall h \in H \quad ghg^{-1} \in H$

<u>הוכחה:</u>

אם $H \lhd G$ אזי לפי ההגדרה $gH = Hg$ לכל $g \in G$ ולכן $gHg^{-1} = H$ לכל $g \in G$ ומכאן ש $ghg^{-1} \in H$ לכל $g \in G$ ולכל $h \in H$.

נניח $\forall g \in G \quad \forall h \in H \quad ghg^{-1} \in H$ אזי $gHg^{-1} \subseteq H$ לכל $g \in G$ ומכאן נובע ש $gH \subseteq Hg$, וכן ש $H = g^{-1}\left(gHg^{-1}\right)g \subseteq g^{-1}Hg$ (*) לכל $g \in G$, לכן מאחר ומדובר **<u>בכל</u>** $g \in G$ ניתן לרשום במקום (*) $H \subseteq gHg^{-1}$ לכל $g \in G$, ז"א ש $Hg \subseteq gH$. משתי ההכלות נקבל ש $gH = Hg$ לכל $g \in G$.

תשובה 3:

א. הטענה נכונה. הוכחה: H_1 נורמלית לכן $H_1H_2 = H_2H_1$. לפי משפט שהוכח בהרצאה (בהינתן ת"ח H_1, H_2, הקבוצה H_1H_2 היא ת"ח אמ"ם $H_1H_2 = H_2H_1$) נקבל כי H_1H_2 אכן תת-חבורה.

ב. H_1H_2 לא בהכרח נורמלית. אפשר לקחת דוגמא טריוויאלית: אם $(G,\cdot,e)$ היא חבורה לא אבלית שיש לה תת-חבורה לא נורמלית (למשל $G = S_n$ עבור $n > 2$), נקח $H_1 = \{e\}$ (ברור כי H_1 נורמלית) ו-H_2 תת-חבורה לא-נורמלית כלשהי של G (למשל $H_2 = <(12)>$). אז $H_1H_2 = H_2$ היא תת-חבורה לא נורמלית.

(אם רוצים דוגמא לא טריוואלית, אפשר למשל להסתכל על D_9 עם הת"ח הנורמלית $H_1 = \{id, \sigma^3, \sigma^6\}$. והת"ח $H_2 = \{id, \tau\}$. מכפלתם היא $\{id, \sigma^3, \sigma^6, \tau, \tau\sigma^3, \tau\sigma^6\}$ והיא לא נורמלית. העובדות כי H_1 נורמלית ו-H_1H_2 לא נורמלית נובעות ישירות מהאפיון של תת-החבורות הנורמליות של D_n עבור n אי-זוגי: הן בדיוק הת"ח הציקליות הנוצרות ע"י σ^m עבור $m < n$: $H_1 = <\sigma^3>$ ולכן נורמלית, וברור ש-H_1H_2 לא נוצרת ע"י שום חזקה של σ, לכן לא נורמלית.)

ג. הטענה נכונה. הוכחה: נתון $H_1 \lhd G, H_2 \lhd G$, צריך למצוא כי $H_1H_2 \lhd G$. שים לב כי לפי סעיף א' $H_1H_2 \leq G$ ולכן נשאר רק להראות ש-H_1H_2 נורמלית. יהיו $h \in H_1H_2$, $g \in G$. צ"ל כי $ghg^{-1} \in H_1H_2$. כיוון ש-$h \in H_1H_2$ קיימים $h_1 \in H_1, h_2 \in H_2$ כך ש-$h = h_1h_2$. כיוון ש-H_1 נורמלית נקבל $gh_1g^{-1} \in H_1$ וכיוון ש-H_2 נורמלית נקבל $gh_2g^{-1} \in H_2$. לכן $(gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1}) = gh_1h_2g^{-1} = h \in H_1H_2$ כפי שרצינו להראות.

ד. הטענה נכונה. הוכחה: נתון $H_1 \lhd G, H_2 \lhd G$, צריך למצוא כי $H_1 \cap H_2 \lhd G$. אנחנו כבר יודעים שחיתוך של ת"ח הוא ת"ח, כלומר $H_1 \cap H_2 \leq G$ ונשאר רק למצוא כי $H_1 \cap H_2$ נורמלית. יהיו $h \in H_1 \cap H_2$, $g \in G$. צ"ל כי $ghg^{-1} \in H_1 \cap H_2$. $h \in H_1 \cap H_2$ לכן $h \in H_1$ וכיוון ש-H_1 נורמלית נקבל $ghg^{-1} \in H_1$. באותו האופן מהנורמליות של H_2 נקבל $ghg^{-1} \in H_2$. לכן סה"כ $ghg^{-1} \in H_1 \cap H_2$ כדרוש.

תשובה 4:

ראשית, כדי להשלים את לוח הכפל: נקח דוגמא. נתחיל מ- $ijk=-1$ ונכפול משמאל ב- i.
נקבל $i^2 jk=-i$ וכיוון ש- $i^2=-1$ קיבלנו $-jk=-i$ כלומר $jk=i$. באופן דומה אפשר למצוא את שאר המכפלות. לוח הכפל המתקבל הוא:

כעת לפתרון השאלה עצמה:

א+ב: ב-Q_8 יש 3 תת-חבורות מסדר 4: $\{\pm 1,\pm \mathrm{i}\}$ ת"ח ציקלית נוצרת על-ידי i , $\{\pm 1,\pm \mathrm{j}\}$ ת"ח ציקלית נוצרת על-ידי j, $\{\pm 1,\pm k\}$ ת"ח ציקלית נוצרת על-ידי k.

האינדקס של כל אחת מהן הוא: $[Q_8:\mathrm{H}]=\frac{8}{4}=2$ ולכן כל אחת מהן היא נורמלית (לפי הטענה שכל ת"ח בעלת אינדקס 2 היא נורמלית.)

יש ת"ח אחת מסדר 2: {1,-1}. ת"ח זו היא גם המרכז של חבורת הקואטרניונים כיוון שמתקיים רק עבור 1,-1:

$-x=(-1)\cdot x=x\cdot(-1)=-1\cdot x$, $1\cdot x=x\cdot 1=x$ לכל $x\in Q_8$, ולכן נורמלית.

כמובן שיש גם את שתי תת-החבורות הטריוויאלית שהן תמיד נורמליות.

למה אין עוד תת-חבורות ב- Q_8 ?

לפי משפט לגרנז' סדר כל ת"ח מחלק את סדר החבורה, וכיוון ש-$|Q_8|=8$ כל ת"ח של חבורת הקואטרניונים היא מסדר 1,2 או 4. מסדר 1 ברור כי $\{1\}$ הת"ח היחידה (זה נכון לכל חבורה). מסדר 2- בת"ח מסדר 2 האיבר האחד הוא הניטרלי - 1 ולכן השני חייב להיות איבר מסדר 2 ו- (1-) הוא האיבר היחיד מסדר 2 בחבורת הקוארטריונים לכן אין עוד ת"ח מסדר 2 ב-Q_8. מסדר 4 - ניקח למשל את i (ובאופן סימטרי זה יהיה נכון גם אם נקח את j או k). אז ת"ח זו חייבת להכיל את כל חזקות i כדי שתהיה סגירות לפעולה, לכן ת"ח זו מכילה את $\{\pm 1,\pm \mathrm{i}\}$זאת אומרת שהת"ח היא לפחות מסדר 4, אבל לפי לגרנז' אין ת"ח ממש גדולה יותר שמכילה אותה.

תשובה 5: (+ תירגול באנגלית)

Proof. (a) see the proof of (c), and replace S by s.

(b) We have: $gh = hg \Leftrightarrow h^g = h$ from which $C_G(G) = Z(G)$ immediately follows. (d) proves also that $Z(G) - C_G(G)$ is normal in $G - N_G(G)$.

(c) $g \in N_G(S) \Rightarrow S^g = S \Rightarrow S = (S^g)^{(g^{-1})} = S^{(g^{-1})} \Rightarrow g^{-1} \in N_G(S)$.
$g_1, g_2 \in N_G(S) \Rightarrow S^{g_1 g_2} = (S^{g_1})^{g_2} = S^{g_2} = S \Rightarrow g_1 g_2 \in N_G(S)$.
Hence, $N_G(S)$ is a group.

(d) for each $c \in C_G(S), n \in N_G(S)$, we have $s^{n^{-1}cn} = (n^{-1}c^{-1}n)s(n^{-1}cn) = n^{-1}c^{-1}(nsn^{-1})cn = n^{-1}c^{-1}s_1cn = n^{-1}s_1n = s$. Where we used the fact that the elements of S are fixed by conjugation under elements of $C_G(S)$, and $\forall n \in N_G(S), s \in S : nsn^{-1}$ is some element $s_1 \in S$, by the definition of $N_G(S)$. This implies $n^{-1}cn \in C_G(S)$.

$\square$

תשובה 6:

(א) טענת עזר: אם G חבורה, $T \subseteq G$, ו-$T^g \subseteq T$ לכל $g \in G$, אזי $\langle T \rangle \trianglelefteq G$.

הוכחה: נובע מיידית מכך שהצמדה של מכפלה על ידי g שווה חמכפלה ההצמדות על ידי g של כל אחד מהגורמים.

נשים לב ש-$(x^{-1})^g = (x^g)^{-1}$, לכן

$$[a^g, b^g] = (a^{-1})^g (b^{-1})^g a^g b^g = (a^{-1}b^{-1}ab)^g = [a,b]^g$$

מכאן $T = \{[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy | x, y \in G\}$ מקיימת $T^g \subseteq T$ לכל $g \in G$, ולפי טענת העזר $S = \langle T \rangle$ נורמלית ב-G.

(ב) לכל $x, y \in G$ יש לבדוק ש-$SxSy = SySx$, או במילים אחרות $SxSySx^{-1}Sy^{-1} = Sxyx^{-1}y^{-1} = S$, זה נכון מכיוון ש-$xyx^{-1}y^{-1} = [x^{-1}, y^{-1}] \in S$.

(ג) אם G/N אבלית אזי לכל $x, y \in G$ מתקיים $NxNy = NyNx$, או במילים אחרות $Nx^{-1}Ny^{-1}NxNy = Nx^{-1}y^{-1}xy = N[x,y] = N$. המחלקות שוות אם ורק אם $[x,y] \in N$. זה נכון לכל $x, y \in G$, כלומר N מכילה קבוצת יוצרים של S לכן $S \subseteq N$.

(ד) לכל $g \in G$, $h \in H$, $[h,g] = h^{-1}g^{-1}hg \in H$ (כי זה איבר של S), לכן $h[h,g] = g^{-1}hg = h^g \in H$, כלומר H נורמלית.

תשובה 7:

סעיף א:

$H=\{e,b\}\ \ ,\ K=\{e,a^2\}$

לפי משפט לגרנז' אם $H\le G$ אז $[G:H]=\frac{|G|}{|H|}$:

במקרה שלנו $[G:H]=\frac{|G|}{|H|}=\frac{8}{2}=4$ ו- $[G:K]=\frac{|G|}{|K|}=\frac{8}{2}=4$.

סעיף ב:

I) המחלקות השמאליות של H ב- G הן:

$$H=\{e,b\},a\cdot H=\{a,ab\},a^2\cdot H=\{a^2,a^2b\},a^3\cdot H=\{a^3,a^3b\}$$

H אינה נורמלית ב- G כי:

$$\{a,ab\}=a\cdot H\neq H\cdot a=\{a,ba\}=\{a,a^3b\}\ .$$

II) המחלקות השמאליות של K ב- G הן:

$$K=\{e,a^2\},a\cdot K=\{a,a^3\},b\cdot K=\{b,ba^2\},ba\cdot K=\{ba,ba^3\}$$

ניתן לבדוק שכל המחלקות הימניות שוות לשמאליות (של אותו איבר ביחס ל- K) ולכן K נורמלית.

אנחנו נבדוק את התנאי לנורמליות: לכל $g\in G,k\in K$ מתקיים $gkg^{-1}\in K$.

עבור $e\in K$ התנאי מתקיים לכל $g\in G$ ($geg^{-1}=e\in K$)

נראה שהתנאי מתקיים ל- $a^2\in K$ ולכל $g\in G$.

את כל אברי G ניתן להציג כ- $g=a^n$ או $g=ba^n$ עבור $n=0,1,2,3$

כאשר $g=a^n$ ברור שהתנאי מתקיים.

כאשר $g=ba^n$ מקבלים ש- $gkg^{-1}=(ba^n)a^2(ba^n)^{-1}=ba^na^2a^{-n}b^{-1}=ba^2b=a^2\in K$

ולכן התנאי מתקיים ו- K נורמלית ב- G.

__תשובה 8:__

(ראשית, $G=\bigcup_n G_n$ חבורה: נבדוק למשל סגירות. יהיו $a,b\in G$. $a\in G$ לכן קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$a\in G_n$. כמו כן $b\in G$ לכן קיים $m\in\mathbb{N}$ כך ש-$b\in G_m$. עבור $s=\max(n,m)$ נקבל כי $a,b\in G_s$, וכיוון ש-G_s חבורה מתקיימת בה סגירות כלומר $ab\in G_s$ לכן $ab\in G$. באופן דומה מוכיחים את שאר התכונות של חבורה.)

כעת לשאלה עצמה: צריך להראות כי G פשוטה כלומר שאין לה ת"ח נורמליות לא טריוואליות. תהי $N\lhd G$, נראה כי N טריוואלית. ראשית, מתקיים $N\cap G_n\lhd G_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$ (לפי כך שאם G חבורה, H ת"ח של G, ו-N ת"ח נורמלית של G, אז $N\cap H$ ת"ח נורמלית של H). כיוון ש-G_n פשוטות, עבור כל n האופציות היחידות הן $N\cap G_n=\{e\}$ או $N\cap G_n=G_n$.

נחלק ל-2 מקרים:

1) קיים $i\in\mathbb{N}$ עבורו $N\cap G_i=G_i$. נבחר את i להיות המינימאלי המקיים זאת. כלומר לכל $k<i$ מתקיים $N\cap G_i=\{e\}$, ולכל $k\geq i$ מתקיים $N\leq G_k$ (הסבר: $N\cap G_i=G_i$ לכן $N\leq G_i$. כמו כן $G_i\leq G_k$ לכל $k>i$ ולכן $N\leq G_k$). אז קיבלנו:

$$N=N\cap G=N\cap(\bigcup_n G_n)=\bigcup_n(N\cap G_n)=(\bigcup_{k=1}^{i-1}N\cap G_k)\cup(\bigcup_{k=i}^{\infty}N\cap G_k)=\{e\}\cup\bigcup_{k=i}^{\infty}G_k=\bigcup_{k=i}^{\infty}G_k=G$$

כלומר $N=G$ היא טריוואלית.

2) לא קיים $i\in\mathbb{N}$ עבורו $N\cap G_i=G_i$, כלומר $N\cap G_i=\{e\}$ לכל $i\in\mathbb{N}$. אבל אז $N=N\cap G=N\cap(\bigcup_n G_n)=\bigcup_n(N\cap G_n)=\bigcup_n\{e\}=\{e\}$ כלומר $N=\{e\}$ היא טריוואלית.

תשובה 9:

נתון: $G\times H$ היא חבורה ציקלית. צ"ל: G ציקלית ו-H ציקלית.

הוכחה: לפי הנתון קיים איבר $(a,b)\in G\times H$ כך ש-$G\times H=\langle (a,b)\rangle$. יש לנו $a\in G$ ו-$b\in H$.

נוכיח כי $G=\langle a\rangle$ ו-$H=\langle b\rangle$ (ולכן G ו-H הן ציקליות).

כדי להוכיח ש-$G=\langle a\rangle$, עלינו להראות שכל איבר של G הוא חזקה של a. ואכן, יהי $x\in G$. אז $(x,e_H)\in G\times H$. היות ו-$G\times H=\langle (a,b)\rangle$ הרי (x,e_H) הוא חזקה של (a,b), כלומר קיים $k\in Z$ כך ש-$(x,e_H)=(a,b)^k$, ז.א. $(x,e_H)=(a^k,b^k)$. מכאן ש-$x=a^k$, כלומר x הוא חזקה של a, כנדרש. זה מוכיח ש-$G=\langle a\rangle$. באותו אופן מראים ש-$H=\langle b\rangle$.

תשובה 10:

. ההוכחה ש-H היא ת"ח היא טכנית. בקשר למספר המחלקות:

$$\text{if } g_b=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b\in Q\setminus\{0\} \quad \text{then} \quad g_bH=\begin{pmatrix} b & ba \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן, אם c,d הם שני מספרים רציונליים (שונים מאפס) כך ש- $c\neq d$, אז $g_cH \neq g_dH$. לכן מספר המחלקות של H ב-G הוא לפחות מספר המספרים ב-Q ולכן $[G:H]=\infty$.