

פונקציות מרוכבות – תרגיל 7

1. חשבו את האינטגרלים הבאים (המסילות מכוונות נגד כיוון השעון):

$$\text{א. } \int_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$$

$$\text{ב. } \int_{|z|=4} \frac{e^{tz}}{z^2+1} dz, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\text{ג. } \int_{|z-1|=2} \frac{\sin z}{z^2-z} dz$$

$$\text{ד. } \int_{|z-1|=1} \frac{\cos \pi z}{(z^2-1)^2} dz$$

$$\text{ה. } \int_{\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=1} \frac{\sin^4 z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{N}$$

2. נניח כי הפונקציה  $f(z)$  מוגדרת ע"י האינטגרל  $f(z) = \oint_{|\zeta|=3} \frac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z} d\zeta$ . מצאו את  $f'(1+i)$ .

3. א. תהי  $f(z)$  פונקציה שלמה, המקיימת  $f(2z) = f(z)$  לכל  $z \in \mathbb{C}$ . הוכיחו כי  $f$  קבועה.

ב. האם ניתן להחליף את הקבוע "2" בסעיף הקודם בכל מספר מרוכב  $\alpha \neq 1$ ? נמקו!

4. נניח כי  $f = u + iv: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  שלמה, ו- $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$  היא פונקציה חסומה. הוכיחו כי  $f$  היא קבועה. רמז: מה ניתן לומר על הפונקציה  $g = e^f$ ?