<u>אלגברה מופשטת 1 – תרגול 4</u>

הבוחן יתקיים ב6.8 בשעה 13:00 (יום שלישי). הבוחן הוא שעה וחצי, שלוש שאלות. בבניין 507 אולם 7. יורכב ברובו מתרגילי הבית, יכול להיות שתהיה שאלה חדשה, וכו'. בהצלחה!!!

תרגיל: יהי a=cis(30) מתקיים כי $< a > \leq C^*$. חשבו את |<a>|.

פתרון: |<a>|=o(a) בעצם מחפשים n כך ש $a^n = 1$. ניתן לחשב מיידית שעבור n=12 התנאי מתקיים. כעת נותר להראות ש12 הוא ה-n המינימלי. נמצא את ה-k המin עבורו 30t=360k כי $a^t = 1 = cis(360k)$. ולכן עבור ...k=1,2,3 ברור שהמינימאלי הוא עבור k=1. הוא לא יכול להיות שלילי (כי הסדר הוא טבעי או אפס) או אפס (כי a אינו נייטרלי).

לכן, 12=|<a>|. מ.ש.ל. ■

<u>משפט</u>: תהא G חבורה ציקלית מסדר n אזי לכל t שלם מתקיים $o(a^t) = \frac{n}{(n,t)}$ עבור G=<a>.

שאלה: כמה יוצרים יש לחבורה ציקלית?

פתרון: לפי משפט, אם (t,n)=1 אזי $o(a^t) = 1$ ואז a^t הוא יוצר החבורה. לכן מספר היוצרים הוא $\varphi(n)$.

- אם G ציקלית אינסופית אזי G איזומורפית ל-Z ($G \cong Z$) ולכן יש לה 2 יוצרים. Z=<1>=<-1>.

דוגמה: נתבונן ב$\Omega_{40} =< w >$ כאשר $w = cis\left(\frac{2\pi}{40}\right)$.

א. מהו הסדר של w^{14}?
$$o(w^{14}) = \frac{40}{(40,14)} = \frac{40}{2} = 20.$$

ב. כמה יוצרים יש ל $\Omega_{40} =< w >$?
מספר היוצרים של $\Omega_{40} =< w >$ הוא 16 $\varphi(40) = 40\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 16$. מ.ש.ל. ■

<u>חבורת הסימטריה</u>: (החבורה הסימטרית או חבורת התמורות)

הגדרה: S_n אוסף כל הפונקציות החח"ע ועל מקבוצה {1,2,..,n} לעצמה. איברי S_n נקראים תמורות. בS_3 תמורה היא פונקציה. (1 2), $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, f(1)=2,f(2)=1,f(3)=3.

התמורות של S_3 הן:

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

מה חשוב לנו לחיים? לדעת לחשב סדר, לכפול אותם, ולחשב הופכי.

- <u>כפל</u>: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$=(1 2 3)(1 2) .

תרגיל: $(1\ 2\ 4\ )(1\ 3)(4\ 1\ 3\ ) = (1\ 2\ 4\ 3) = (4\ 3\ 1\ 2)$. למדנו את זה בלינארית (חישוב דטרמיננטות). חשוב לדעת את זה טוב טוב!

- הופכי של מחזור: $(i_1, i_2, \dots, i_n)^{-1} = (i_n, i_{n-1}, \dots, i_1)$.
- מחזורים זרים: נאמר שמחזורים $(j_1, \dots, j_n), (i_1, \dots, i_n)$ הם זרים אם $\{j_1, \dots, j_n\} \cap \{i_1, \dots i_n) = \emptyset$ מחזורים זרים זהם מתחלפים.

-דביר, זה לאו דווקא מחזורים באותו אורך... תשנה את אחד ה-n-ים ל- k או משהו כזה...

תכונות מעניינות וחשובות:

1. החל מ-n=3 החבורה S_n אינה אבלית. איך נראה את זה? נראה שיש שתי תמורות שאינן מתחלפות. לדוגמה, נביט ב (13)(12) וב(12)(13). קיבלנו שהראשון הוא (132) והשני הוא (123) ולכן שתי התמורות הללו אינן מתחלפות, ולכן S_n (החל מ- $n=3$) היא אינה אבלית (שכן, שתי התמורות הללו נמצאות בכל S_n כנ"ל).
2. החל מ-n=3 חבורת התמורות אינה ציקלית. זה ברור כי כל ציקלית היא אבלית, ואם היא אינה אבלית אין היא ציקלית.
3. $|S_n| = n!$.

תרגיל: פתרו את המשוואה: $(\ 1\ 2\ 3\ )^2 x = (12)(132)^{-1}$.

פתרון: נפשט את הביטוי ונחפש את x: $(1\ 3\ 2)x = (1\ 2)(2\ 3\ 1) = (2\ 3)$. כעת נכפול בהופכי את שני האגפים, ונקבל (2 1)=(2 3) (2 3 1) = x. מ.ש.ל. ■

הגדרה: חבורה נוצרת על ידי מספר איברים: תהי G חבורה ותהי $A \le G$ ת"ק (לאו דווקא ת"ח, נכון, אז למה השתמשת בסימון של תת חבורה ☺ תחליף את הקטן-שווה בהכלה?!...) לא ריקה של איברים מ-G. תת החבורה הנוצרת על ידי A היא תת החבורה הקטנה ביותר של G המכילה את A, ונסמנה ב<A>.

אם G=<A> נאמר ש-G נוצרת על ידי A.

דוגמאות:

1. נתבונן ב- $G = \square$, A={2,3}. ?=<2,3>=<A>. ז"א $< 2,3 >= \{2k_1 + 3k_2 | k_1, k_2 \in Z\}$. נוכיח שזה ממש כל Z על ידי הכלה דו כיוונית. ברור לנו ש-

$< 2,3 > \subseteq Z$. את הכיוון השני קצת יותר קשה להראות. ניתן להראות ש$a = -2a + 3a$ ולכן אין בעיה בכלל להראות גם את הכיוון השני.

2. נמשיך עם אותה G. A={4,6}. ניתן להראות ש<4,6>=2Z=<2>. להוכיח בבית!

הערה: אם G חבורה אבלית ו$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ =A אזי $< A >= \{x_1^{i_1} x_2^{i_2}, \dots\}$.

הגדרה: חבורה G נוצרת סופית אם יש לה קבוצת יוצרים סופית.

כלומר, קיימים $a_1, \dots, a_n \in G$ כך ש$< a_1, a_2, \dots, a_n >= G$.

- כל חבורה ציקלית נוצרת סופית על ידי איבר אחד.
- כל חבורה סופית נוצרת סופית (על ידי כל איבריה, למשל).

תרגיל: ראינו את החבורה של שורשי היחידה ה-n-ים. נגדיר $\Omega_\infty = \cup_{n=1}^{\infty}\Omega_n$. (זהו אוסף כל שורשי היחידה).
הוכיחו כי Ω_∞ אינה נוצרת סופית.

פתרון: נניח בשלילה כי Ω_∞ נוצרת סופית. כלומר קיימים $a_n, \dots, a_k \in \Omega_\infty$

כך ש $\{ < a_1, \dots, a_k >= \{a_1^{j_1} a_2^{j_2} \dots a_k^{j_k} | 1 \le i \le k , 0 \le j_i \le o(a_i) < \infty\}$ כי a_i שייך ל Ω_n כלשהו ולכן סדרו סופי.

כלומר, כל קבוצה סופית ב Ω_∞ יוצרת חבורה סופית שכן $| < a_1, .., a_k > | \le o(a_1)o(a_2) \dots o(a_k) < \infty$
אבל ב Ω_∞ יש ∞ איברים ולכן זו סתירה. מכאן ש Ω_∞ אינה נוצרת סופית. מ.ש.ל. ■

דוגמאות:

1. $Z \times Z = \{(a,b)| \ a,b \in Z\}$ נוצרת סופית ע"י <(1,0),(0,1)>. כי לכל g ב-$Z \times Z$ קיימים m,n כך ש-g=(m,n) וז"א g=m(1,0)+n(0,1).
2. S_n נוצרת סופית? מתקיים כי $Rank(S_2) = 2$ אבל גם $S_2 =< (12), (123 \dots n) >$. נראה ונוכיח בהמשך הקורס.דביר – זה אמור להיות S_n בכל הדוגמה הזאת...

תרגיל: הוכיחו כי החבורות הבאות אינן נוצרות סופית.

א. $(R, +, 0)$
ב. $(Q^*, \cdot, 1)$

מישהו שאל למה יש גם את האיבר הטבעי ביחס לפעולה בצד ימין בסוגריים, התשובה היא שזאת אופציה נוספת לסמן חבורה ולהדגיש את האיבר הנייטרלי.

פתרון:

א. נניח בשלילה ש-R נוצרת סופית. ז"א קיימים $a_1, \dots, a_n \in$ כך ש-
אבל הבעיה היא של $R =< a_1, a_2, \dots, a_n > = \{a_1^{i_1}, \dots, a_n^{i_n}\}: i,j \in Z , 1 \le i_j \le n$ יש $\aleph_0$ $a_n^{i_n}$ אפשרויות, ולכן בסה"כ יש $\aleph_0 = (\aleph_0)^n$ איברים, ועם זאת, R אינה בת מניה בכלל. מ.ש.ל.
נניח בשלילה ש * נוצרת סופית. $Q^* =< \left(\frac{a_1}{b_1}\right), \dots, \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \ge$

$$\left\{ \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{i_1} \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{i_2} \dots \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{i_n} \middle| \begin{matrix} 1 \le j \le n \\ i_j \in Z \end{matrix} \right\}$$

מ.ש.ל. ■לא הבנתי את התשובה לב'... אנחנו לא מוכיחים למקרה כללי =) מוכיחים בדיוק למה שצריך ☺

א. הגורמים הראשוניים במכנים של האיברים הנוצרים מוגבלים לקבוצת הגורמים הראשוניים של $b_1, \dots, b_n$, אבל זאת קבוצה סופית, ולכן לא ניתן לקבל את כל השברים ב $(^*, \cdot, 1)$, סתירה.

אתגר (כי פרנקנטל ממש ביקש יפה) : (MANN מהספר של רוטמן). G חבורה סופית. S,T הן תתי קבוצות (לאו דווקא תתי חבורות) לא ריקות. אזי מתקיים או G=ST (כפל איבר איבר בקבוצות ולא בחבורות) או ש $|G| \geq |S| + |T|$.