תרגיל 2 - אינפי 3 תש"פ

הערה. לתלמידים שלא ראו את המונח "מטריקה" בהרצאה מותר להניח, שבכל מקום שמופיע "מרחב מטרי (X,d)", X היא תת-קבוצה של $\mathbb{R}^n$ ו $d(x,y)=\|x-y\|$.

תזכורת: הזוג (X,d) נקרא מרחב מטרי, או באופן שקול d היא מטריקה על הקבוצה X, אם d היא פונקציה $d:X\times X\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ שמקיימת את התנאים הבאים:

1. $d(x,y)=0$ אם ורק אם $x\neq y$.
2. $d(x,y)=d(y,x)$ לכל $x,y\in X$.
3. לכל $x,y,z\in X$ מתקיים אי-שוויון המשולש: $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$.

אם $X\subseteq\mathbb{R}^n$, אזי הנורמה $\|\cdot\|$ מגדירה מטריקה d על X על ידי

$$d(x,y)=\|\cdot\|.$$

תרגיל 1. הוכיחו את המשפט הבא: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $\emptyset\neq A\subseteq X$. הראו, ש A היא קבוצה פתוחה אם ורק אם קיים אוסף של כדורים פתוחים $\{B(x_i,r_i)\}$ כך שמתקיים:

$$\bigcup_{i\in I}B(x_i,r_i)=A.$$

תרגיל 2. הראו שאם $S\subseteq\mathbb{R}$ היא סגורה וחסומה מלרע, אזי $\inf S\in S$ ישירות מההגדרה של קבוצה סגורה. (כלמר בלי להשתמש בתנאי על נקודות הצטברות).

תרגיל 3. יהי (X,d) יהי $x_1,\dots,x_n\in X$. הראו ש $X\setminus\{x_1,\dots,x_n\}$ היא קבוצה פתוחה.

תרגיל 4. האם $\left\{\frac{1}{n}\middle|n\in\mathbb{N}\right\}$ היא קבוצה פתוחה או סגורה? מה לגבי $\left\{\frac{1}{n}\middle|n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}$?

תרגיל 5. מצאו את כל הנקודות הפנימיות של $\mathbb{Z}$.

תרגיל 6. הוכיחו שהקבוצות הבאות הן פתוחות ב $\mathbb{R}^2$.

1. עבור $v\in\mathbb{R}^2$ ו U פתוחה, הראו ש $v+U=\{v+u|u\in U,v\in V\}$.
2. $$U+V=\{u+v|u\in U,v\in V\}$$
   כאשר $u\in U$ ו $v\in V$ הן פתוחות.

3. U היא קבוצה פתוחה ב $\mathbb{R}^2$ ו $\alpha \in \mathbb{R}$, אזי

$$\alpha U = \{\alpha u | u \in U\}$$

היא קבוצה פתוחה ב $\mathbb{R}^2$.

4. הראו שהקבוצה $\{(x,y)\,|ax+by>0\}$ היא קבוצה פתוחה.

5. יהיו $v,u \in \mathbb{R}^2$ בת"ל ויהיו $(a,b),(c,d) \subseteq \mathbb{R}$ קטעים פתוחים. הראו, שהקבוצה

$$(a,b)\,v + (c,d)\,u = \{tv + su | a < t < b, c < s < d\}$$

היא פתוחה.

6. אם $A \in M_2(\mathbb{R})$ היא מטריצה הפיכה ו U היא קבוצה פתוחה ב $\mathbb{R}^2$, אזי

$$AU = \{au | u \in U\}$$

היא קבוצה פתוחה. (הדרכה: ניתן להציג את הקבוצה כאיחוד של קבוצות מהסעיף הקודם).

הערה. בנוסף לנורמה הסטנדרטית, ניתן להשתמש גם בנורמות 1 ו ∞ על מנת להוכיח שקבוצה מסויימת פתוחה ואז להשתמש בשקילות שלהן עם הנורמה הסטנדרטית (יש הוכחה במערך תרגול, שנורמות שקולות מגדרירות אותן קבוצות פתוחות). בנוסף, מותר להשתמש באפיון של קבוצות סגורות על ידי נק' הצטברות, שראיתם בהרצאה ונראה בתרגול הבא.

תרגיל 7. (בונוס). נשים לב, שלכל $x \in [0,1]$ קיים טור ממשי כך

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} = x$$

ו $a_i \in \{0,1,2\}$.

1. הוכיחו, שהטענה נכונה.

2. הראו שאם הטור $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i}$ ו $a_n = 1$ אזי

$$x = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{3^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^i}.$$

3. נסמן על ידי $\mathcal{C}$ את האוסף הבא:

$$\mathcal{C} = \left\{ x \in [0,1] \,| \exists \{a_i\}_{i=1}^{\infty}, x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \wedge \forall i \in \mathbb{N} : a_i \in \{0,2\} \right\},$$

כלמר קיים פיתוח שעבורו לכל i, $a_i = 0$. שימו לב, ש $\frac{1}{3} \in \mathcal{C}$, מפני שקיים פיתוח

$$\frac{1}{3} = \sum_{i=2}^{n} \frac{2}{a^i}$$

וכל המקדמים בפיתוח הזה הם 0 או 2. הראו, ש $\mathcal{C}$ היא קבוצה סגורה. (הדרכה: הראו, שכל נק' במשלים מכילה קטע פתוח סביבה שלא נמצא בקבוצה. כמו כן, מומלץ להתשמש בתכונות של טורים גאומטריים, על מנת לקבל את החסמים הרצויים).

תרגיל 8. (בונוס). הערה: אפשר להניח שהנורמה עובדים איתה היא הנורמה הסטנדרטית על $\mathbb{R}^n$, כלומר

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} .$$

עבור $A \subseteq \mathbb{R}^n$ נאמר ש Aחסומה, אם קיים $c \in \mathbb{R}$ כך שלכל $v \in A$, $\|v\| \leq c$.

נאמר ש $A \subseteq \mathbb{R}^n$ קמורה, אם לכל $v, u \in A$ מתקיים $tv + (1-t)u \in A$ לכל $0 \leq t \leq 1$.

נאמר ש $A \subseteq \mathbb{R}^n$ היא סימטרית ביחס ל 0, אם לכל $v \in A$, מתקיים $-v \in A$.

הראו, שאם A היא קבוצה פתוחה, קמורה, חסומה וסימטרית ביחס ל 0, אזי הפונקציה

$$\|v\|_A = \inf\left\{k > 0 | \frac{x}{k} \in A\right\}$$

מגדירה נורמה של $\mathbb{R}^n$ ומתקיים $A = B(0,1)$ ביחס ל $\|\cdot\|_A$. (כלומר, A היא כדור יחידה הפתוח ביחס לנורמה החדשה שהדגרנו).