

אנליזה מתקדמת למורים, פתרון תרגיל 7

16 בינואר 2019

1. מצאו את כל הערכים האפשריים למספרים הבאים:

(א) 2^i

(ב) $(1+i)^{2i}$

פתרון:

א. נרשום את הצורה הפולארית של הבסיס, באופן כללי: $2 = 2\text{cis}(0 + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$. כעת נקבל מהגדרה של חזקה מרוכבת:

$$2^i = (2\text{cis}(0 + 2\pi k))^i = e^{i \cdot L(2\text{cis}(2\pi k))} = e^{i \cdot (\ln 2 + i \cdot 2\pi k)} = e^{2\pi k + i \ln 2} = e^{2\pi k} \text{cis}(\ln 2)$$

ב. באותו אופן, $1+i = \sqrt{2}\text{cis}(\frac{\pi}{4} + 2\pi k) = \sqrt{2}\text{cis}\frac{9\pi k}{4}$, ולכן:

$$(1+i)^{2i} = e^{2i \cdot L(\sqrt{2}\text{cis}\frac{9\pi k}{4})} = e^{2i \cdot (\ln \sqrt{2} + \frac{9\pi k}{4}i)} = e^{-\frac{9\pi k}{2} + 2 \ln(\sqrt{2})i} = e^{-\frac{9\pi k}{2}} \text{cis}(2 \ln \sqrt{2})$$

2. מצאו פתרון כללי של המד"ר הבאות:

(א) $y' + y \tan x = 0$ (הדרכה לאינטגרל: מה זה $\frac{f'}{f}$?)

(ב) $y' + y \sin x = 0$

(ג) $y' + y = xe^x$

פתרון:

א. זו מד"ר ליניארית הומוגנית עם $a(x) = \tan x$. נמצא תחילה את $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx$. נזכר בגזירה הבאה:

$$(\ln(f(x)))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'}{f}$$

ולכן $\int \frac{f'}{f} = \ln|f|$. אצלנו נוסיף פעמיים מינוס כדי לקבל את הצורה הזו:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int -\frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x|$$

כעת נציב בנוסחה: $y = ce^{-A(x)} = ce^{\ln|\cos x|} = c \cdot |\cos x|$

ב. זו מד"ר ליניארית הומוגנית עם $a(x) = \sin x$. הפתרון הוא: $y = ce^{-\int \sin x dx} = ce^{\cos x}$

ג. זו מד"ר ליניארית לא הומוגנית עם $a(x) = 1$, $b(x) = xe^x$. הפתרון הוא:

$$y = e^{-A(x)} \left(\int b(x)e^{A(x)} dx + c \right) = e^{-x} \left(\int xe^x e^x dx + c \right) = e^{-x} \left(\int xe^{2x} dx + c \right)$$

נפתור את האינטגרל בחלקים:

$$\int x e^{2x} dx = \{f = x, f' = 1, g' = e^{2x} g = \frac{1}{2} e^{2x}\} = \frac{x}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} = e^{2x} \cdot \frac{2x-1}{4}$$

לכן התשובה היא:

$$y = e^{-x} \left(e^{2x} \cdot \frac{2x-1}{4} + c \right) = e^x \cdot \frac{2x-1}{4} + c e^{-x}$$

3. מצאו פתרון פרטי של המד"ר הבאות, עם תנאי ההתחלה המתאימים:

$$(א) \begin{cases} y' + 2xy = 2x \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad (\text{הדרכה לאינטגרל: שיטת ההצבה})$$

$$(ב) \begin{cases} y' + \frac{y}{x} = e^x \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$$(ג) \begin{cases} y' - \frac{y}{x^2} = 0 \\ y(1) = e \end{cases}$$

פתרון:

א. זו מד"ר ליניארית מסדר ראשון לא הומוגנית. $a(x) = 2x, A(x) = \int a(x) = x^2, b(x) = 2x$. לכן הפתרון הכללי הוא:

$$y = e^{-A(x)} \left(\int b(x) e^{A(x)} dx + c \right) = e^{-x^2} \left(\int 2x e^{x^2} dx + c \right) = \{t = x^2, dt = 2x dx\} = e^{-x^2} \left(\int e^t dt + c \right) = e^{-x^2} (e^t + c)$$

עכשיו נחזיר את ההצבה אחורה ונקבל

$$y = e^{-x^2} (e^{x^2} + c) = 1 + c e^{-x^2}$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$1 = 1 + c e^{-1}$$

$$c e^{-1} = 0$$

$$c = 0$$

ולכן הפתרון הפרטי הוא:

$$y = 1$$

ב. באותו אופן: $a(x) = \frac{1}{x}, A(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln x, b(x) = e^x$. לכן: $y = e^{-\ln x} (\int e^x e^{\ln x} dx + c) = \frac{1}{x} (\int x e^x dx + c)$. נפתור את האינטגרל בחלקים:

$$\int x e^x dx = \{f = x, f' = 1, g' = e^x g = e^x\} = x e^x - \int e^x dx = e^x (x - 1)$$

נחזור לתרגיל:

$$y = \frac{1}{x} (e^x (x - 1) + c) = \frac{c + e^x (x - 1)}{x}$$

נציב תנאי התחלה:

$$0 = \frac{c + e(1 - 1)}{1} = c$$

$$c = 0$$

ולכן הפתרון הפרטי הוא:

$$y = \frac{e^x(x - 1)}{x}$$

ג. כאן היא הומוגנית עם $A(x) = \frac{1}{x}$, $a(x) = -\frac{1}{x^2}$, ולכן: $y = ce^{-A(x)} = ce^{-\frac{1}{x}}$. נציב תנאי התחלה:

$$e = ce^{-\frac{1}{1}}$$

$$c = 1$$

ולכן הפתרון הפרטי הוא:

$$y = e^{-\frac{1}{x}}$$

בהצלחה!