

מבחן בחשבון אינפיניטסמלי 2 מועד א'

ענו על כל השאלות הבאות. כל שאלה שווה 18 נקודות. חומר עזר אסור. משך הבחינה שלוש שעות. בהצלחה!

1. חשבו: א. $\int \frac{\sin x \cos x}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx$ (התשובה תלויה ב- a ו- b).

ב. $\int \frac{dt}{\sqrt{e^t - 1}}$

2. א. הגדירו פונקציה אינטגרבילית בקטע סגור $[a, b]$.
ב. תהי $f(x)$ מוגדרת וחסומה בקטע סגור $[a, b]$. הוכיחו ש- f אינטגרבילית שם אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה P של $[a, b]$ כך ש- $\bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon$.

3. נניח ש- $f(x)$ היא פונקציה אינטגרבילית מקומית בקטע $[a, \infty)$ כך שהאינטגרל $\int_1^{\infty} f(x) dx$ מתכנס.

א. האם בהכרח $\int_1^{\infty} f^2(x) dx$ מתכנס?

ב. האם בהכרח $\int_1^{\infty} f(x^2) dx$ מתכנס?

נמקו את תשובותיכם.

4. מצאו את אורך הגרף $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ מעל הקטע $[0, 1]$.

5. מצאו את תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n + 4^n} \left(x^n + \frac{1}{x^n} \right)$. נמקו את תשובותיכם.

6. נניח שלכל n הפונקציה $f_n(x)$ מוגדרת ורציפה במ"ש בקטע (a, b) . עוד נניח שקיים $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ במ"ש ב- (a, b) . הוכיחו ש- $f(x)$ רציפה במ"ש ב- (a, b) .