תרגיל בית 10

1. הוכיחו כי קבוצת הפונקציות הפשוטות צפופה ב L^p עבור $p \geq 1$.

פתרון: תהי $f \in L^p$ $\left(\int |f|^p d\mu < \infty\right)$ חיובית. אזי קיימת סדרה של פונקציות פשוטות φ_n כך ש $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ ו $\varphi_n \to f$. עפ"י משפט ההתכנסות המונוטונית נובע כי

$$\lim_{n\to\infty}\int \phi_n{}^p d\mu = \int \lim_{n\to\infty}\phi_n{}^p d\mu = \int f^p d\mu$$

ראינו בהרצאה את אי השוויון $|a+b|^p \leq 2^p\left(|a|^p + |b|^p\right)$. נגדיר את $g_n = 2^p\left(|\varphi_n|^p + |f|^p\right)$. ברור כי לכל n g_n אינגרבילית וכן כי $g = \lim g_n = 2^{p+1}|f|^p$ אינטגרבילית. מכאן , עפ"י משפט ההתכנסות הנשלטת נובע כי

$\lim_{n\to\infty}\int |f-\phi_n|^p d\mu = \int \lim_{n\to\infty}|f-\phi_n|^p d\mu = 0$ ומכאן שההתכנסות היא ב L^p . עבור פונקציה כללית, נשתמש בא"ש מינקובסקי על מנת לקבל $\left\|f^+ - f^- - \left(\varphi_n^+ - \varphi_n^-\right)\right\|_p \leq \left\|f^+ - \varphi_n^+\right\|_p + \left\|\varphi_n^- - f^-\right\|_p \to 0$.

2. הראו כי L^∞ הינו מרחב שלם.

פתרון: עפ"י מה שראינו בכיתה מספיק להראות כי כל טור ב L^∞ שמתכנס בהחלט מתכנס. נניח ו $f_n \in L^\infty$, וגם $\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_\infty < \infty$. נגדיר את $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ולכל f_n נגדיר את הקבוצה $E_n = \{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\}$. ברור כי $m(E_n) = 0$ וגם כי $m(E) = m\left(\bigcup_n E_n\right) = 0$.

מן ההגדרה של $\|\cdot\|_\infty$ נובע כי $f(x)$ מתכנס בהחלט כב"מ(על E) ולכן גם מתכנס כב"מ. נראה כי $f \in L^\infty$,

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in E^c}|f(x)| \leq \sup_{x\in E^c}\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in E^c}|f_n(x)| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\|f_n(x)\|_\infty < \infty
\end{aligned}$$

ומכאן ש $f \in L^{\infty}$.

3. נניח ו H הינו מרחב הילברט עם בסיס בן מנייה ונניח כי $\|x_n\| \to \|x\|$ כאשר $n \to \infty$ וגם $\langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle$ לכל $y \in H$ כאשר $n \to \infty$. הוכיחו כי $\|x_n - x\| \to 0$ כאשר $n \to \infty$.

פתרון: מכיוון שיש לנו בסיס בן מנייה $\{\varphi_n\}$ נוכל לרשום $x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^n \varphi_n$ וגם $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_n$. למדנו כי $a_k = \langle x, \varphi_k \rangle$ וגם כי $a_k^n = \langle x_n, \varphi_k \rangle$ ולכן מהנתון כי $\langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle$ נובע כי $a_k^n \to a_k$ ומהנתון כי $\|x_n\| \to \|x\|$ נובע כי $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^n|^2 \to \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$. אנחנו צריכים להוכיח כי $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^n - a_k|^2 \to 0$ כאשר $n \to \infty$. ברור כי $|a_k^n - a_k|^2 \le |a_k^n|^2 + |a_k|^2$ ולכן עפ"י משפט ההתכנסות הנשלטת נובע כי $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k^n - a_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} |a_k^n - a_k|^2 = 0$.

4. פונקציה מ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ תקרא קמורה אם מתקיים

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda) y\right) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

לכל $y > x$ ו $0 \le \lambda \le 1$.

i. הוכיחו כי קיים מספר ממשי c כך שמתקיים $f(y) \ge f(x) + c(y-x)$ לכל $y \in \mathbb{R}$.

פתרון: נקבע נקודה x ונסתכל על שני הישרים הבאים :

$$h_1(t) = \frac{f(y_1) - f(x)}{y_1 - x}(t-x) + f(x)$$

$$h_2(t) = \frac{f(y_2) - f(x)}{y_2 - x}(t-x) + f(x)$$

כאשר $y_2 > y_1$. מכיוון שעפ"י הגדרת הפונקציה הקמורה נובע כי בנקודה y_1 $(x < y_1 < y_2)$ $h_2(y_1) \ge f(y_1)$. לכן, לישר $h_2(t)$ שיפוע גדול משל $h_1(t)$. נובע אם כך שהפונקציה $f > h_1$ לכל $y > y_1$. נסתכל על אוסף הישרים החותכים את גרף הפונקציה f בשתי נקודות $x < y$ ונסמן אוסף זה ב S_{right} . נסמן ב $\tan(h)$ את השיפוע של ישר כלשהו ונגדיר

$$M = \inf\left\{\tan(h) : h \in S_{right}\right\}$$

קל לראות כי הישר אשר חותך את הגרף בנקודה x ואשר שיפועו הינו M מקיים $h(y) \le f(y)$ לכל $y > x$. באותו אופן נגדיר את הקבוצה S_{left} כאוסף כל הישרים החותכים את הגרף של f בנקודות $y < x$ ונגדיר

$$m=\sup\left\{\tan\left(h\right):h\in S_{left}\right\}$$

קל לראות כי $m\le M$ וכי כל $c\in\left[m,M\right]$ יקיים את הנדרש.

ii. יהי $\left(X,S,\mu\right)$ ממ"ח כך ש $\mu\left(X\right)=1$, ותהי $g:X\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית ו f פונקציה קמורה . הוכיחו את אי שוויון יאנסן

$$f\left(\int gd\mu\right)\le\int f\left(g\right)d\mu ,$$

ע"י שימוש בהגדרת הקמירות $f\left(c_1p+c_2\left(1-p\right)\right)\le pf\left(c_1\right)+\left(1-p\right)f\left(c_2\right)$ וקירוב של פונקציות פשוטות. כלומר, ללא שימוש בסעיף הקודם כמו שעשינו בתרגול.

פתרון:

נוכל לקרב את הפונקציה g ע"י פונקציות פשוטות ועולות φ_n . נניח כי ל φ_2 שני ערכים - c_1 ו c_2 . אזי עפ"י הגדרת הפונקציה הקמורה נובע כי

$$f\left(\int gd\mu\right)=f\left(c_1p+c_2\left(1-p\right)\right)\le pf\left(c_1\right)+\left(1-p\right)f\left(c_2\right)=\int f\left(g\right)d\mu$$

עכשיו באינדוקציה,

נניח כי הדבר נכון עבור φ_n המקבלת n ערכים. אזי

$$\begin{aligned}f\left(\int\varphi_{n+1}d\mu\right)&=f\left(\sum_{i=1}^{n+1}c_ip_i\right)=f\left(\sum_{i=1}^{n}c_ip_i+c_{n+1}p_{n+1}\right)\\&=f\left(\frac{1-p_{n+1}}{1-p_{n+1}}\sum_{i=1}^{n}c_ip_i+c_{n+1}p_{n+1}\right)\le\left(1-p_{n+1}\right)f\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{c_ip_i}{1-p_{n+1}}\right)+p_{n+1}f\left(c_{n+1}\right)\\&=\left(1-p_{n+1}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{f\left(c_i\right)p_i}{1-p_{n+1}}+p_{n+1}f\left(c_{n+1}\right)=\int f\left(\varphi_{n+1}\right)d\mu\end{aligned}$$

כעת, נזכור כי פונקציה קמורה הינה רציפה ולכן

$$\lim f\left(\int\varphi_nd\mu\right)=f\left(\lim\int\varphi_nd\mu\right)=f\left(\int g\right)$$

עכשיו, על מנת להכניס את הגבול לתוך החלק הימני של הא"ש נעזר בחלק הראשון של התרגיל על מנת לקבל $f\left(\varphi_n\right)\ge f\left(x\right)+c\varphi_n\Rightarrow f\left(\varphi_n\right)-f\left(x\right)-c\varphi_n\ge0$.

מכאן ש (יש להסביר מדוע האינטגרל מתכנס בכלל, להסביר שאו שהוא אינסוף או שהוא סופי כי החלק השלילי חסום ע"י פונקציה אינטגרבילית $f^-\left(\varphi_n\right)\le\left|f\left(0\right)+c\varphi_n\right|$)

$$\underline{\lim}\int f(\varphi_n)d\mu = \underline{\lim}\int f(\varphi_n) - \left(f(0) + c\varphi_n\right) + \left(f(0) + c\varphi_n\right)d\mu$$
$$= \underline{\lim}\int f(\varphi_n) - \left(f(0) + c\varphi_n\right)d\mu + \underline{\lim}\int f(0) + c\varphi_n d\mu$$
$$\le \int \underline{\lim}\left(f(\varphi_n) - \left(f(0) + c\varphi_n\right)\right)d\mu + \underline{\lim}\int f(0) + c\varphi_n d\mu = \int f(g)d\mu$$

ולכן $f\left(\int g d\mu\right) \le \underline{\lim}\int f(\varphi_n)d\mu \le \int f(g)d\mu$