תרגיל בית 8 אינפי 3

1. נתונה פונקציה

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

מצא את $f''_{xy}(0,0)$ ואת $f''_{yx}(0,0)$.

פתרון. ראשית, ברור כי

$$f'_y(0,0)=f'_x(0,0)=0$$

נמצא גם את ערך הנגזרות החלקיות במקומות נוספים:

$$f'_x(x,y)=y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

לכן ברור כי

$$f'_x(0,y)=-y$$

והנגזרת החלקית השניה היא

$$f'_y(x,y)=x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

לכן

$$f'_y(x,0)=x$$

כעת נחשב את הנגזרות המעורבות ונקבל:

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f_x(0,t)-f_x(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-t}{t}=-1$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f_y(t,0)-f_y(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{t}=1$$

הנגזרות המעורבות קיימות אבל לא שוות.

2. תהי $f(x,y)$ פונקציה גזירה ברציפות פעמיים בתחום $D=(0,\infty)\times(0,\infty)$. ונניח ש x,y מבוטאים באמצעות s,t לפי $x=e^{s+t},\quad y=e^{s-t}$ כך שניתן להגדיר הרכבה

$$g(s,t)=f(x(s,t),y(s,t))$$

הוכח כי

$$g_{st}=0\Leftrightarrow x^2f_{xx}+xf_x=y^2f_{yy}+yf_y$$

פתרון. נבצע החלפת משתנים: נתחיל עם g_s

$$g_s = f_x x_s + f_y y_s$$

עכשיו

$$\frac{\partial}{\partial t}(g_s) = \frac{\partial}{\partial t}(f_x x_s + f_y y_s) = \frac{\partial}{\partial t}(f_x)x_s + f_x x_{st} + \frac{\partial}{\partial t}(f_y)y_s + f_y y_{st} =$$
$$(f_{xx}x_t + f_{xy}y_t)x_s + f_x x_{st} + (f_{yx}x_t + f_{yy}y_t)y_s + f_y y_{st} =$$
$$f_{xx}x_t x_s + f_{xy}y_t x_s + f_x x_{st} + f_{yx}x_t y_s + f_{yy}y_t y_s + f_y y_{st}$$

במקרה שלנו

$$x_s = x_t = e^{s+t} = x$$

$$x_{ts} = e^{s+t} = x$$

$$y_s = e^{s-t} = x$$

$$y_t = -e^{s-t} = -y$$

$$y_{st} = -e^{s-t} = -y$$

אם נציב את כל אלה בביטוי שלנו נקבל ש

$$g_{st} = f_{xx}x^2 - f_{xy}xy + f_x x + f_{yx}xy - f_{yy}y^2 - f_y y =$$
$$f_{xx}x^2 + f_x x - f_{yy}y^2 - f_y y$$

לכן ברור ש

$$g_{st} = 0 \Leftrightarrow x^2 f_{xx} + x u_x = y^2 f_{yy} + y f_y$$

3. מצאו את פולינום טיילור סביב הנקודה $(1,0)$ עד סדר 2 עם שארית לגרנז' של $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

פתרון. נחשב את כל הנגזרות החלקיות מסדר 0 ועד סדר 3, בנגזרות עד סדר 2 נציב את הנקודה (1,0) בנגזרות מסדר 3 (שהן ישמשו לשארית לגרנז') - נציב את $(1+\theta(x-1), \theta y)$

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_{xx} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad f_{xy} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad f_{yy} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

נחשב קודם את הפולינום עד סדר 2, נציב בנגזרות שחישבנו את הנקודה $(1,0)$:

$$f(1,0)=1,\quad f_x(1,0)=1,\quad f_y(1,0)=0$$

$$f_{xx}(1,0)=0,\quad f_{xy}(1,0)=0,\quad f_{yy}(0,0)=1$$

לכן פולינום טיילור (בלי שארית) עד סדר 2 סביב $(1,0)$ הוא:

$$f(x,y)=1+(x-1)+\frac{1}{2}y^2$$

בשביל שארית לגרנז' נחשב את הנגזרות מסדר 3

$$f_{xxx}=-3\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}},\quad f_{xxy}=\frac{2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}-3\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$f_{xyy}=\frac{2x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}-3\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}},\quad f_{yyy}=-3\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

נסמן

$$\theta_x=1+\theta(x-1),\quad \theta_y=\theta y$$

ונקבל ששארית לגרנז' היא:

$$\frac{1}{3!}(-3\frac{\theta_x\theta_y^2}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{5}{2}}}(x-1)^3+3\cdot(\frac{2\theta_y}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{3}{2}}}-3\frac{\theta_y^3}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{5}{2}}})(x-1)^2y+$$
$$+3\cdot(\frac{2\theta_x}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{3}{2}}}-3\frac{\theta_x^3}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{5}{2}}})(x-1)y^2-3\frac{\theta_x^2\theta_y}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{5}{2}}}y^3)$$

לכן הפולינום כולו עם השארית הוא:

$$f(x,y)=1+(x-1)+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}(-\frac{\theta_x\theta_y^2}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{5}{2}}}(x-1)^3+(\frac{2\theta_y}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{3}{2}}}-3\frac{\theta_y^3}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{5}{2}}})(x-1)^2y$$
$$+(\frac{2\theta_x}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{3}{2}}}-3\frac{\theta_x^3}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{5}{2}}})(x-1)y^2-\frac{\theta_x^2\theta_y}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{5}{2}}}y^3)$$

4. מצאו את פולינום טיילור סביב הנקודה $(0,0)$ עד סדר 5 של $f(x,y)=e^{x^2}sin(2y)$

פתרון. היות ו

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

נקבל כי

$$e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^5)$$

בדומה:

$$\sin 2y=2y-\frac{(2y)^3}{3!}+\frac{(2y)^5}{5!}+o(y^5)$$

ולכן:

$$e^{x^2}sin(2y) = (1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(|x|^5))(2y - \frac{(2y)^3}{3!} + \frac{(2y)^5}{5!} + o(|y|^5)) =$$
$$2y + 2x^2y + x^4y - \frac{4}{3}y^3 - \frac{4}{3}x^2y^3 + \frac{(2y)^5}{5!} + o(||(x, y)||^5)$$

5. יהיו $a, b \in \mathbb{R}$, כתבו מחדש את הפולינום $x^3 + xy + y^2$ כך שהוא יהיה פולינום של $x - a, \quad y - b$.

פתרון. נחשב טור טיילור עד סדר 3 סביב (a, b):

$$f_x = 3x^2 + y, \quad f_y = x + 2y$$

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = 1, \quad f_{yy} = 2$$

$$f_{xxx} = 6, \quad f_{xxy} = f_{xyy} = f_{yyy} = 0$$

נציב את (a, b) ונקבל:

$$f(a, b) = a^3 + ab + b^2$$

$$f_x(a, b) = 3a^2 + b, \quad f_y(a, b) = a + 2b$$

$$f_{xx}(a, b) = 6a, \quad f_{xy}(a, b) = 1, \quad f_{yy}(a, b) = 2$$

$$f_{xxx}(a, b) = 6, \quad f_{xxy}(a, b) = f_{xyy}(a, b) = f_{yyy}(a, b) = 0$$

ולכן טור טיילור הוא

$$a^3 + ab + b^2 + (3a^2 + b)(x - a) + (a + 2b)(y - b) + \frac{1}{2}(6a(x - a)^2 + 2(x - a)(y - b) + 2(y - b)^2) +$$
$$+\frac{1}{3!}(6(x - a)^3)$$

שזה בכתיבה קצת יותר יפה:

$$a^3+ab+b^2+(3a^2+b)(x-a)+(a+2b)(y-b)+3a(x-a)^2+(x-a)(y-b)+(y-b)^2+(x-a)^3$$

6. כתבו את פיתוח טיילור של $f(x, y) = sin(xe^y)$ סביב הנקודה $(\frac{\pi}{2}, 0)$ עד סדר 2.

פתרון. נחשב נגזרות עד סדר 2:

$$f_x = \cos(xe^y)e^y, \quad f_y = \cos(xe^y)xe^y$$

$$f_{xx} = -e^{2y}\sin(xe^y), \quad f_{xy} = -\sin(xe^y)xe^{2y}+\cos(xe^y)e^y, \quad f_{yy} = xe^y\cos(xe^y)-\sin(xe^y)x^2e^{2y}$$

נציב את הנקודה $(\frac{\pi}{2},0)$ ונקבל:

$$f(\frac{\pi}{2},0)=1$$

$$f_x(\frac{\pi}{2},0)=0,\quad f_y(\frac{\pi}{2},0)=0$$

$$f_{xx}(\frac{\pi}{2},0)=-1,\quad f_{xy}(\frac{\pi}{2},0)=-\frac{\pi}{2},\quad f_{yy}(\frac{\pi}{2},0)=-\frac{\pi^2}{4}$$

לכן הפולינום עד סדר 2 עם שארית פיאנו הוא:

$$f(x,y)=1+\frac{1}{2}(-(x-\frac{\pi}{2})^2-\frac{\pi}{2}(x-\frac{\pi}{2})y-\frac{\pi^2}{4}y^2)+o(||(x,y)||^2)$$

7. תהי $f(x,y)=e^{x^2y^3}$.

(א) כתבו פיתוח טיילור של f סביב $(0,0)$ עד סדר 19.

פתרון. היות ו

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

נקבל ש

$$e^{x^2y^3}=1+x^2y^3+\frac{x^4y^6}{2}+\frac{x^6y^9}{6}+o(||x,y||^{19})$$

(נשים לב ש x^8y^{12} הוא כבר איבר ממעלה 20).

(ב) חשבו את $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x^8\partial^{11}}$

פתרון. היות ואין בפיתוח טיילור אף איבר מסדר 19 ברור ש

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x^8\partial^{11}}=0$$