פתרון תרגיל 7

שאלה 1

א)
$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$
$$= \lim_{b\to\infty} \arctan x\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} \arctan b = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

ב)
$$\int_0^\infty \cos x\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \cos x\,dx =$$
$$= \lim_{b\to\infty} \sin x\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} \sin b$$

כלומר לא קיים.

ג)
$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \ln|x|\Big|_1^b$$
$$= \lim_{b\to\infty} \ln b - \ln 0 = \boxed{\infty}$$

לכן האינטגרל מתבדר.

ד)
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 x^{-\frac{2}{3}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\Big|_\varepsilon^1 =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} 3\sqrt[3]{x}\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(3 - 3\sqrt[3]{\varepsilon}\right) = \boxed{3}$$

ג)
$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^-}\int_{-1}^{\varepsilon}\frac{dx}{x}+\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^-}\ln|x|\Big|_{-1}^{\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to 0^+}\ln|x|\Big|_{\varepsilon}^{1}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^-}(\ln|\varepsilon|-\ln 1)+\lim_{\varepsilon\to 0^+}(\ln 1-\ln|\varepsilon|)=$$

$$=-\infty=$$

כי אחד מהגבולות הנ"ל אינו קיים לכן
האינטגרל לא קיים.

<u>שאלה 2</u>

א)
$$\frac{x^2+x+3}{x^4+2x+10}\le\frac{x^2+x^2+3x^2}{x^4}=5\frac{1}{x^2}$$

האינטגרל $\int_1^\infty\frac{dx}{x^2}$ מתכנס לכן

ממבחן ההשוואה נובע שגם $\int_1^\infty\frac{x^2+x+3}{x^4+2x+10}dx$
מתכנס.

ב)
$$\frac{x}{x^2+x+2}\ge\frac{x}{x^2+x^2+2x^2}=\frac{1}{4x}$$

האינטגרל $\int_1^\infty\frac{dx}{x}$ מתבדר לכן

ממבחן ההשוואה נובע ש $\int_1^\infty\frac{x\,dx}{x^2+x+3}$
מתבדר

ב) נשים לב כי $x^{1+\frac{1}{x}} = x \cdot x^{\frac{1}{x}}$

בעזרת כלל לופיטל ניתן להוכיח כי

$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$. עבור ערכי x מספיק גדולים

מתקיים $x^{\frac{1}{x}} < 2$.

לכן

$$\frac{1}{x^{1+\frac{1}{x}}} = \frac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{x}}} > \frac{1}{2x}$$

האינטגרל $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ מתבדר ולכן גם

$\int_1^\infty \frac{1}{x^{1+\frac{1}{x}}}dx$ מתבדר.

ג) עבור ערכי x מספיק גדולים המונה

מתנהג כמו x^5 והמכנה כמו x^8

לכן הביטוי מתחת לשורש מתנהג כמו

$\frac{1}{x^3}$. נשווה את האינטגרל

$\int_1^\infty \sqrt{\frac{x^5+3x+5}{2x^8+4}}\,dx$ עם האינטגרל $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^5+3x+5}{2x^8+4}}}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}} = 1$$

לכן 2 האינטגרלים מתכנסים יחד או

מתבדרים יחד. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ מתכנס

ולכן גם האינטגרל $\int_1^\infty \sqrt{\frac{x^5+3x+5}{2x^8+4}}\,dx$

מתכנס.

ה) הפונקציות $x^3, x, \arctan x$ הן אי-זוגיות, אפשר להחליף את x ל- $-x$ ולחשב את ההתכנסות האינטגרל

$$\int_1^\infty \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3-x}}\,dx$$

בעזרת מבחן המנה עם $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ אפשר לבדוק את הגבול

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^3}\arctan x}{\sqrt{x^3-x}} = \frac{\pi}{2}$$

ומכיון שהאינטגרל $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ מתכנס

גם האינטגרל בשאלה מתכנס.

<u>שאלה 3</u>

א) נבדוק את מבחן ההשוואה עם $\frac{1}{x^{\alpha-2}}$

ונקבל

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin^2(x)}{x^\alpha}}{\frac{1}{x^{\alpha-2}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2(x)}{x^2} = 1$$

אנו יודעים כי האינטגרל $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-2}}$

מתכנס אם ורק אם $\alpha<3$

לכן גם האינטגרל בשאלה מתכנס

בדיוק עבור $\alpha<3$.

ב) עבור $\alpha>0$ נבדוק מבחן השוואה עם $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ונקבל

$$\lim_{x\to0^+}\frac{|\ln(x)|^\alpha}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\,|\ln(x)|^\alpha=0$$

וידוע כי האינטגרל $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$ מתכנס לכן האינטגרל בשאלה.

עבור $\alpha=0$ ברור כי האינטגרל מתכנס.

עבור $\alpha<0$ נקבל שאינטגרל לא אמיתי מסוג שני עם נקודה בעייתית $x=1$.

נבדוק השוואה עם $\frac{|\ln(x)|^\alpha}{x}$ ונקבל

$$\lim_{x\to1^-}\frac{|\ln(x)|^\alpha}{\frac{|\ln(x)|^\alpha}{x}}=\lim_{x\to1^-}\frac{x|\ln(x)|^\alpha}{|\ln(x)|^\alpha}=$$

$$=\lim_{x\to1^-}x=1$$

נבדוק התכנסות האינטגרל $\int_0^1\frac{|\ln(x)|^\alpha}{x}dx$ במקרה שלנו $|\ln(x)|=-\ln(x)$ לכן,

$$\int_0^1\frac{(-\ln(x))^\alpha}{x}dx=\left\{t=-\ln x,\ dt=-\frac{1}{x}dx\right\}=$$

$$=-\int_\infty^0 t^\alpha dt=\int_0^\infty t^\alpha dt$$

האינטגרל האחרון מתכנס כאשר $\alpha<-1$

לכן האינטגרל בשאלה מתכנס עבור $\alpha<-1$.