פתרון משוואות ריבועיות:
תרגיל:
1. פתרו את המשוואה $z^2 = -3 + 4i$
פתרון: נציב $z = a + bi$.

$$(a + bi)^2 = -3 + 4i$$

$$a^2 + 2abi - b^2 = -3 + 4i$$

נשווה חלקים ממשיים וחלקים מדומים:

$$a^2 - b^2 = -3$$

$$2ab = 4$$

נבודד את $b$ מהמשוואה השניה:

$$b = \frac{4}{2a} = \frac{2}{a}$$

נציב במשוואה הראשונה:

$$a^2 - (\frac{2}{a})^2 = -3$$

נכפיל ב$a^2$:

$$a^4 - 4 = -3a^2$$

נסמן $a^2 = t$

$$t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$(t + 4)(t - 1) = 0$$

$$t = -4, 1$$

$$t = a^2$$

כאשר $a$ מספר ממשי. לכן $t$ לא יכול להיות שלילי. כלומר,

$$t = 1$$

$$a = \pm 1$$

$$b = \pm 2$$

סה"כ יש שני שורשים:

$$1 + 2i, -1 - 2i$$

תרגיל: פתרו את המשוואה הבאה:

$$z^2 + (-5 + 2i)z + 7 + i = 0$$

פתרון: נשתמש בנוסחת השורשים:

$$z_{1,2} = \frac{5 - 2i \pm \sqrt{(-5 + 2i)^2 - 4(7 + i)}}{2}$$

צריך להבין את השורש, ולפני כן נפשט את הדלתא.

$$(-5 + 2i)^2 - 4(7 + i) = (25 - 20i - 4) - 28 - 4i =$$

$$-7 - 24i$$

נותר להבין מהו

$$\sqrt{-7 - 24i}$$

נפתור תרגיל עזר:

$$x = \sqrt{-7 - 24i}$$

שקול:

$$x^2 = -7 - 24i$$

נציב: $x = a + bi$

$$(a+bi)^2 = -7 - 24i$$

$$a^2 + 2abi - b^2 = -7 - 24i$$

$$2ab = -24$$

$$a^2 - b^2 = -7$$

נחלץ את $b$ מהמשוואה הראשונה:

$$b = \frac{-12}{a}$$

נציב במשוואה השניה:

$$a^2 - (\frac{-12}{a})^2 = -7$$

נכפיל ב$a^2$:

$$a^4 - 144 = -7a^2$$

נציב

$$t = a^2$$

$$t^2 + 7t - 144 = 0$$

$$(t+16)(t-9) = 0$$

$$t = -16, 9$$

$-16$ לא ייתכן, כי $t = a^2$, לכן

$$t = 9$$

$$a = \pm 3$$

$$b = \mp 4$$

כלומר, יש שני פתרונות לשורש:

$$3-4i, -3+4i$$

נחזור ונציב בנוסחת השורשים:

$$z_{1,2}=\frac{5-2i\pm(3-4i)}{2}$$

$$z_1=\frac{5-2i+3-4i}{2}=4-3i$$

$$z_2=\frac{5-2i-(3-4i)}{2}=1+i$$

הצגה פולרית והצגה קרטזית:
למדנו שכל מספר מרוכב ניתן להציג בצורה $a+bi$.
זה נקרא "הצגה קרטזית".
יש דרך נוספת לבטא מספרים מרוכבים.
כל מספר מרוכב הוא נקודה במישור.
בשביל לאפיין נקודה במישור, יש שתי דרכים אפשריות:

1. להגיד מי הערכים של הנקודה (במקרה שלנו: ה$a$ וה$b$)
2. להגיד מה המרחק של הנקודה מראשית הצירים, ובאיזה זווית היא נמצאת.

בהינתן נקודה $a+bi$, המרחק שלה מראשית הצירים זה ה"נורמה" שהכרנו בשיעור הקודם. ומחשבים אותה ע"י $\sqrt{a^2+b^2}$. והזווית, נסמן ב$\theta$, מקיימת: $\tan\theta=\frac{b}{a}$. מהמשוואה הזאת נחלץ את $\theta$.
הערות:

1. אם $a=0$ אנחנו לא יכולים להשתמש בנוסחא. אבל אנחנו יודעים שהמספר הוא מדומה טהור, הוא נמצא על ציר ה$i$, ולכן הזווית שלו היא או $\frac{\pi}{2}$ או $\frac{3\pi}{2}$ (תלוי אם $b$ חיובי או שלילי).
2. כשאנחנו מחלצים את $\theta$ מהמשוואה $\tan\theta=\frac{b}{a}$ יש שני פתרונות אפשריים. כי לtan יש מחזוריות של $\pi$. איך נדע מה האפשרות הנכונה? בהתאם לרביע שבו המספר נמצא. אם הוא בחצי העליון של המישור ($b$ חיובי) אז $0<\theta<\pi$. אם הוא בחצי התחתון, ($b$ שלילי) אז $\pi<\theta<2\pi$)

מה קורה כש$b=0$. אז המספר על ציר ה$x$. ואז אם $a$ חיובי, $\theta=0$, ואם $a$ שלילי, $\theta=\pi$.
כשהנקודה היא ראשית הצירים, כל זווית תעבוד. כי המרחק מראשית הצירים הוא 0.
סימון: כאשר ידוע שהמרחק של מספר הוא $r$, והזווית שלו היא $\theta$, מסמנים אותו ב$rcis(\theta)$.
וזה נקרא ההצגה הפולרית של המספר.
דוגמאות:
מצאו את ההצגות הפולריות של המספרים הבאים:

1. $1$
2. $i$
3. $1+i$
4. $1-i$
5. $-1-i$

פתרון :

1. $1 = 1 + 0i$.

$r = 1$

$\theta = 0$

לכן $1 = 1cis0 = cis0$. (כאשר הנורמה היא 1, אפשר לא לכתוב אותה).

2. $i = 0 + 1 \cdot i$

$r = 1$

$\theta = \frac{\pi}{2}$

$$i = 1 \cdot cis(\frac{\pi}{2}) = cis(\frac{\pi}{2})$$

3. $1 + i$

$$r = \sqrt{2}$$

$$\tan(\theta) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$1 + i = \sqrt{2}cis(\frac{\pi}{4})$$

4. $1 - i$

$$r = \sqrt{2}$$

$$\tan\theta = -1$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4}(+\pi)$$

מכיוון שהמספר נמצא בחצי התחתון של המישור, הזווית הנכונה היא

$$\frac{7\pi}{4}$$

$$1 - i = \sqrt{2}cis(\frac{7\pi}{4})$$

5. $-1 - i$

$$r = \sqrt{2}$$

$$\tan\theta = 1$$

הפתרון שהמחשבון נותן הוא $\frac{\pi}{4}$, אבל המספר נמצא ברביע השלישי, ולכן טווח הזווית שלו הוא בין $\pi$ ל$2\pi$. אז צריך להוסיף $\pi$. כלומר, הזווית היא $\frac{5\pi}{4}$.

$$-1 - i = \sqrt{2}cis(\frac{5\pi}{4})$$

הערה: ל$cis$ יש מחזוריות של $2\pi$. כלומר, הזווית של מספר יחידה עד כדי כפולות של $2\pi$.
איך עוברים מהצגה פולרית לקרטזית?

$$z = rcis\theta$$

$$\cos\theta = \frac{a}{r}$$

$$\sin\theta = \frac{b}{r}$$

כלומר:

$$a = r\cos\theta, b = r\sin\theta$$

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

מפה מגיע הכינוי $r(cis\theta)$
דוגמא:
1. $2cis\frac{2\pi}{3}$
פתרון:

$$2\cos\frac{2\pi}{3} + i2\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$-1 + i\sqrt{3}$$

2. $3cis(\frac{5\pi}{4})$

$$3\cos(\frac{5\pi}{4}) + i3\sin(\frac{5\pi}{4})$$

$$\frac{-3}{\sqrt{2}}+i\frac{-3}{\sqrt{2}}$$

נוסחת הכפל:

$$r_1cis(\theta_1)r_2cis(\theta_2)=r_1r_2cis(\theta_1+\theta_2)$$

הוכחה: נעביר לצורה הקרטזית.

$$(r_1\cos\theta_1+ir_1\sin\theta_1)(r_2\cos\theta_2+ir_2\sin\theta_2)=$$

$$r_1r_2\cos\theta_1\cos\theta_2+ir_1r_2\cos\theta_1\sin\theta_2+$$

$$ir_1r_2\sin\theta_1\cos\theta_2-r_1r_2\sin\theta_1\sin\theta_2=$$

$$r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2)]=$$

$$r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]=$$

$$r_1r_2cis(\theta_1+\theta_2)$$

מש"ל.
דוגמא:

$$2cis(\frac{\pi}{7})3cis(\frac{2\pi}{11})=6cis(\frac{25\pi}{77})$$

מסקנה: (נוסחת דה מואבר):

$$(rcis(\theta))^n=r^ncis(n\theta)$$

לדוגמא:

$$[3cis(\frac{\pi}{5})]^{12}=3^{12}cis(\frac{12\pi}{5})$$

תזכורת: לכל מספר מרוכב $z$ יש הופכי. כלומר, איזשהו מספר מרוכב $z'$, כך שכשמכפילים מקבלים

$$z\cdot z'=1$$

למדנו למצוא את ההפוכי בצורה הקרטזית.

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

עכשיו נלמד למצוא אותו בצורה הפולרית.

$$z = rcis(\theta)$$

אנחנו רוצים להבין מה הרדיוס ומה הזווית של $\frac{1}{z}$.
נניח ש:

$$\frac{1}{z} = scis(\alpha)$$

$$(rcis(\theta))(scis(\alpha)) = 1$$

הצורה הפולרית של $1$ היא $1cis0$.

$$rscis(\theta+\alpha) = 1cis0$$

לכן

$$s = \frac{1}{r}$$

$$\alpha = -\theta$$

לא בטוח ש$\theta+\alpha=0$. יכול להיות גם ש$\theta+\alpha=2\pi$.
במקרה כזה

$$\alpha = 2\pi - \theta$$

אבל

$$cis(-\theta) = cis(2\pi-\theta)$$

כלומר,

$$\frac{1}{rcis(\theta)} = \frac{1}{r}cis(-\theta)$$

לדוגמא:

$$\frac{1}{2cis(\frac{\pi}{3})} = \frac{1}{2}cis(-\frac{\pi}{3})$$

הערה: לחיבור של מספרים מרוכבים אין נוסחא בצורה פולרית. (בשביל לחבר שני מספרים מרוכבים חייבים להציג אותם בצורה קרטזית)

מציאת שורשים:

$$z^n = x$$

כאשר $z, x$ מספרים מרוכבים.

ראשית, נציג את שני המספרים בצורה פולרית.

$$(rcis\theta)^n = (scis(\alpha))$$

$$r^n cis(n\theta) = scis(\alpha)$$

$$r = \sqrt[n]{s}$$

$$\theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}$$

כש$k$ יכול להיות כל מספר שלם. למעשה מספיק להציב רק $k = 0, ..., n-1$. וזה יתן את כל הפתרונות.

הסבר: ניזכר כי לכל $k$ שלם,

$$scis(\alpha) = scis(\alpha + 2\pi k)$$

ולכן אם $\theta$ מקיים ש$\theta n = \alpha$, אז

$$[\sqrt[n]{s}cis(\theta)]^n = scis(n\theta) = scis(\alpha)$$

לכן

$$\sqrt[n]{s}cis(\frac{\alpha}{n})$$

הוא פתרון למשוואה.

אם נקח $\theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}$

$$[\sqrt[n]{s}cis(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n})]^n = scis(\alpha + 2\pi) = scis(\alpha)$$

ולכן גם

$$\sqrt[n]{s}cis(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n})$$

הוא פתרון למשוואה.
באופן דומה:

$$[\sqrt[n]{s}cis(\frac{\alpha}{n}+\frac{4\pi}{n})]^n = scis(\alpha+4\pi) = scis(\alpha)$$

ולכן גם

$$\sqrt[n]{s}cis(\frac{\alpha}{n}+\frac{4\pi}{n})$$

הוא פתרון למשוואה.
בעצם הדגמנו פה את $k=0, k=1, k=2$.
מספיק להציב רק עד $k=n-1$.
כי כאשר נציב

$$k=n$$

נקבל את המספר

$$\sqrt[n]{s}cis(\frac{\alpha}{n}+\frac{n\cdot 2\pi}{n}) = \sqrt[n]{s}cis(\frac{\alpha}{n}+2\pi) = \sqrt[n]{s}cis(\frac{\alpha}{n})$$

ואם נציב $k=n+1$, נקבל את אותו מספר כמו כשהיצבנו $k=1$.
תמיד יהיו $n$ שורשי $n$ לכל מספר מרוכב.
דוגמא:

$$z^3=7$$

ההצגה הפולרית של 7 היא $7cis0$

$$(rcis(\theta))^3 = 7cis0$$

$$r^3=7$$

$$r=\sqrt[3]{7}$$

$$3\theta = 0+2\pi k$$

$$\theta = \frac{0}{3} + \frac{2\pi k}{3}$$

$$z = \sqrt[3]{7}cis(\frac{0}{3} + \frac{2\pi k}{3})$$

ונציב $k = 0, 1, 2$

$$z_1 = \sqrt[3]{7}cis0$$

$$z_2 = \sqrt[3]{7}cis(\frac{2\pi}{3})$$

$$z_3 = \sqrt[3]{7}cis(\frac{4\pi}{3})$$

דוגמא נוספת:

$$z^4 = 16cis(\frac{\pi}{8})$$

$$z = \sqrt[4]{16}cis(\frac{\pi}{32} + \frac{2\pi k}{4})$$

$$z_1 = 2cis(\frac{\pi}{32})$$

$$z_2 = 2cis(\frac{\pi}{32} + \frac{\pi}{2})$$

$$z_3 = 2cis(\frac{\pi}{32} + \pi)$$

$$z_4 = 2cis(\frac{\pi}{32} + \frac{3\pi}{2})$$

כל פעם לוקחים את הפתרון הקודם ומוסיפים $\frac{2\pi}{n}$