תרגול 3 - מטריצה מייצגת

תרגיל. לגבי כל אחד הטענות הבאות קבע האם קיימת העתקה לינארית. אם כן- תן דוגמא, אם לא- הסבר למה לא.

1. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^5$ המקיימת $dim\left(Im\left(T\right)\right)=4$
לא יתכן, נניח בשלילה שקיימת לכן לפי משפט הדרגה מתקיים

$$dim\left(V\right)=dim\left(Im\left(T\right)\right)+dim\left(Ker\left(T\right)\right)$$

ובמקרה שלנו

$$3=4+dim\left(Ker\left(T\right)\right)$$

לכן

$$-1=dim\left(Ker\left(T\right)\right)$$

סתירה

2. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^5$ איזומורפיזים.
לא יתכן, נניח בשלילה שקיימת אז T על ולכן

$$dim\left(W\right)\leq dim\left(V\right)$$

סתירה

3. $T:\mathbb{R}_3\left[x\right]\to\mathbb{R}^{2\times2}$ איזומורפיזים.
נכון קיימת, נשלח בסיס סטנדרטי לבסיס סטנדרטי כלומר

$$\begin{cases} T\left(1\right)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\\ T\left(x\right)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\\ T\left(x^2\right)=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\\ T\left(x^3\right)=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\end{cases}$$

הגדרה. תהא

$$T:V\to W$$

ה"ל.

$$E=\{v_1,\dots v_n\}$$

בסיס ל V.

$$F=\{w_1,\dots w_m\}$$

בסיס ל W.
אזי מטריצה A המקיימת לכל $v\in V$ מתקיים $\left[T\left(v\right)\right]_F=A\left[v\right]_E$ ונסמן $A=\left[T\right]_F^E$

משפט. תהא $T:V\to W$ ה"ל.

$$E=\{v_1,\dots v_n\}$$

בסיס ל V.

$$F=\{w_1,\dots w_m\}$$

בסיס ל W. אזי המטריצה המייצגת של T לפי הבסיסים E,F הינה

$$[T]_F^E=\left(\begin{array}{cccc} | & | & & | \\ [T(v_1)]_F & [T(v_2)]_F & \cdots & [T(v_n)]_F \\ | & | & & | \end{array}\right)\in\mathbb{F}^{m\times n}$$

תרגיל. חשב את המטריצה המייצגת של $T:\mathbb{R}_3\left[x\right]\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת כך

$$T(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{pmatrix} b+c \\ a \end{pmatrix}$$

עבור הבסיסים $E=\left\{-1,2+x,3+x+x^2,x^3\right\},F=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$

פתרון. נחשב

$$\begin{cases} T(-1)=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} & \Rightarrow\ [T(-1)]_F=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \\ T(2+x)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=-1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} & \Rightarrow\ [T(2+x)]_F=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} \\ T(3+x+x^2)=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=-1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} & \Rightarrow\ [T(3+x+x^2)]_F=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} \\ T(x^3)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} & \Rightarrow\ [T(x^3)]_F=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \end{cases}$$

ולכן

$$[T]_F^E=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

למשל אם ניקח $p=4+2x+x^2+x^3$ שאמור להתקיים

$$\begin{gathered} \left[T\left(p\right)\right]_F=\left[T\right]\left[p\right]_E \\ \Downarrow \\ \left[\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right]_F=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \\ \Downarrow \\ \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \end{gathered}$$

תרגיל. תהי $Id:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת כך

$$T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

חשב את המטריצה המייצגת $[Id]_L^F$ (עבור הבסיסים $F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, L =$
$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,.

פתרון. נחשב

$$\begin{cases} T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} & \Rightarrow \quad [T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} & \Rightarrow \quad [T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

ולכן

$$[Id]_L^F = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

למעשה זאת מטריצת מעבר בין בסיסים כי מתקיים

$$[v]_L = [Id(v)]_L = [Id]_L^F [v]_F$$

למשל מתקיים השיווין

$$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right]_L = \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\right]_L^F \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right]_F$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

תרגיל. (המשך לשני התרגילים הקודמים) חשבו את המטריצה המייצגת של $[T]_L^E$

פתרון.

$$\begin{aligned} & [T]_L^E = \\ = \quad & [Id \circ T]_L^E = \\ = \quad & [Id]_L^F \circ [T]_F^E = \\ = \quad & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \\ = \quad & \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

הערה. תכונות של מטריצה מייצגת

1. יהיו $T, S : \underset{E}{V} \to \underset{F}{W}$ העתקות לינארית אז $[T+S]_F^E = [T]_F^E + [S]_F^E$.
2. יהיו $T : \underset{E}{V} \to \underset{F}{W}, S : \underset{F}{W} \to \underset{H}{U}$ העתקות לינארית אז $[S \circ T]_H^E = [S]_H^F [T]_F^E$.
3. אם $T : \underset{E}{V} \to \underset{F}{W}$ הפיכה אז מתקיים $[T^{-1}]_E^F = \left([T]_F^E\right)^{-1}$

עוד שימושים: הפיכות גרעין ותמונה של ה"ל

תהא $T:\underset{E}{V}\to\underset{F}{W}$ עם בסיסים E,F בהתאמה. אזי

1. $[\ker T]_E = N\left([T]_F^E\right)$
2. $[\mathrm{Im}T]_F = C\left([T]_F^E\right)$

דוגמה. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}_2[x]$ ובסיסים $S=\{1,x,x^2\}$, $E=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

עם מטריצה מייצגת

$$A=[T]_S^E=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

מצא בסיס ל-$Im\,(T)$ ו-$Ker\,(T)$.

פתרון. מתקיים

$$[\ker T]_E = N(A) = N\left(\begin{pmatrix}1&0&-4\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\right)=\left\{\begin{pmatrix}4t\\-2t\\t\end{pmatrix}\;:\;t\in\mathbb{R}\right\}$$

לכן

$$\ker T=\left\{4t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-2t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\;:\;t\in\mathbb{R}\right\}=Span\left\{\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ו-

$$[\mathrm{Im}T]_S=C(A)=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}\;:\;a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

ולכן

$$\mathrm{Im}T=\{a\cdot 1+b\cdot x\;:\;a,b\in\mathbb{R}\}=span\{1,x\}$$

וניתן לדעת שה"ל לא הפיכה כי המטריצה לא הפיכה