שיעורי בית 6

1. יהיו $u,v\in V$ שני וקטורים כך $|u|=|v|$. הוכיחו כי קיימת $T:V\to V$ אוניטרית כך ש $T(u)=v$. [הדרכה: התחילו במקרה ש $|u|=|v|=1$]
פתרון: מקרה ראשון: נניח ש $|u|=|v|=1$.

נשלים את u לבסיס או"נ $\{u,u_2,...,u_n\}$ ונשלים את v לבסיס או"נ $\{v,v_2,...v_n\}$.
ממשפט ההגדרה קיימת העתקה לינארית כך ש $T(u)=v,T(u_i)=v_i$. מכיוון שהיא מעבירה בין בסיסים או"נ היא העתקה אוניטרית.

מקרה כללי:

(א) אם $|u|=|v|=0$ נקח $T=I$.

(ב) אחרת, נקח $u'=\dfrac{u}{|u|},v'=\dfrac{v}{|v|}$.
מהמקרה הראשון יש T אוניטרית כך ש $T(u')=v'$. נכפיל בנורמה $|u|=|v|$כדי לקבל $T(u)=v$.

2. תהא $T:V\to V$ נורמלית. הוכיחו כי

(א) לכל k טבעי מתקיים כי T מתחלפת עם $(T^*)^k$
פתרון: באינדוקציה על k:
$k=1$: זה הנתון.
נניח עבור k נוכיח עבור $k+1$:

$$\begin{aligned}\left(T^{k+1}\right)^*T=\left(T^kT\right)^*T=T^*\left(T^k\right)^*T=\\ T^*T\left(T^k\right)^*=TT^*\left(T^k\right)^*=T\left(T^{k+1}\right)^*\end{aligned}$$

כאשר המעבר בין השורות הוא הנחת האינדוקציה.

(ב) לכל k טבעי מתקיים כי T^k נורמלית.
פתרון: באינדוקציה על k:
$k=1$: זה הנתון.
נניח עבור k נוכיח עבור $k+1$:

$$\begin{aligned}\left(T^{k+1}\right)^*T^{k+1}=\left(T^kT\right)^*T^kT=T^*\left(T^k\right)^*T^kT=\\ T^*T^k\left(T^k\right)^*T=T^*T^kT\left(T^k\right)^*=\\ T^kTT^*\left(T^k\right)^*=T^{k+1}\left(T^{k+1}\right)^*\end{aligned}$$

כאשר המעבר בין השורות הראשונת זה תרגיל קודם. המעבר בין השורות התחתונות זה התרגיל הקודם עם T^*

3. יהי T אופרטור נורמלי. הוכיחו:

(א) $\ker T=\ker T^*$.

(ב) $ImT=ImT^*$

(ג) לכל k טבעי, $\ker T^k=\ker T$

(ד) לכל k טבעי, $ImT^k=ImT$.

פתרון:

(א) $T^*(v)=0 \iff ||T^*(v)||=0 \iff ||T(v)||=0 \iff T(v)=0$
כאשר המעבר האמצעי הוא משפט מההרצאה.

(ב) ראינו בתרירגול כי $Im(T)=(\ker T^*)^\perp$ ולכן בצירוף סעיף 1. נקבל $Im(T)=(\ker T^*)^\perp=(\ker T)^\perp=(ImT^*)$

(ג) מ"ל ל$k=2$. הסבר: אם T נורמלית, אז גם T^2 נורמלית. ואז נקבל ש $\ker T^4=\ker T^2=\ker T$. וכן הלאה באינדוקציה לכל חזקה של 2. כעת, עבור k טבעי כלשהו, קיים n טבעי כך ש $2^n<k<2^{n+1}$. אז: $\ker T=\ker T^{2^n}\subseteq\ker T^k\subseteq\ker T^{2^{n+1}}=\ker T$, לכן $\ker T^k=\ker T$.
ובכן, יהי v כך ש $T^2(v)=0$. כלומר, $T(T(v))=0$. כלומר, $T(v)\in\ker T$. מסעיף 1 נקבל $T(v)\in\ker T^*$. אזי $v\in\ker T^*T$. ומתרגיל שעשינו קודם, $\ker T=\ker T^*T$. לכן $T(v)=0$.

(ד) נובע מכך ש $ImT\subseteq ImT^k$ וממשפט הדרגה נקבל כי $\dim ImT+\dim\ker T=\dim ImT^k+\dim\ker T^k$ כיוון שמימד הגרעין שווה לפי סעיף קודם גם מימד התמונות שווה. כיוון שבנוסף יש הכלה בכיוון אחד נקבל שיוויון.

4. תרגיל: $T:V\to V$ הרמיטית שכל הע"ע שלה אי שליליים. הוכיחו שקיימת S הרמיטית כך ש $T=S^2$
פתרון: קיימת P אוניטרית כך ש $T=P^*DP$ ו D אלכסונית עם ע"ע אי שליליים.
אזי $T=P^*\sqrt{D}PP^*\sqrt{D}P$ כאשר $\sqrt{D}$ זה מטריצה אלכסונית כאשר המיקום i,i שווה ל $\sqrt{D_{i,i}}$. כעת נגדיר $S=P^*\sqrt{D}P$ ואז $S^2=T$ ו $S^*=S$ מחישוב ישיר.

5. תרגיל: $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית עם ע"ע אי שליליים. אזי: $tr(A^2)\le tr(A)^2$
פתרון: קיימת D אלכסונית עם מספרים אי־שלילים על האלכסון כך ש $D\sim A$ (A דומה ל D) ואז $A^2\sim D^2$ לכן $tr(A^2)=\sum_{i=1}^n\lambda_i^2\le\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i\right)^2=tr(A)^2$