תרגיל בית 2

1. תהי m מידת לבג. נניח כי לכל n A_n הינה קבוצה מדידה ב $[0,1]$. תהי B קבוצת כל ה x -ים המופיעים באינסוף קבוצות A_n .
   א. הראו כי B הינה מדידה לבג.
   ב. אם $m(A_n) > \delta > 0$ לכל n, הראו כי $m(B) > \delta$.
   ג. אם $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_n) < \infty$ אז $m(B) = 0$.
   ד. תנו דוגמא למקרה בו $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \infty$ אבל $m(B) = 0$.

2. יהי $\varepsilon > 0$, תהי m מידת לבג, ונניח כי A הינה קבוצת בורל ב $\mathbb{R}$. הוכח כי אם מתקיים

$$m(A \cap I) \leq (1-\varepsilon) m(I)$$

לכל אינטרוול I אזי $m(A) = 0$.

3. הגדרה: נאמר שקבוצה $G \subseteq \mathbb{R}$ היא מטיפוס G_δ אם ניתן להציג אותה כחיתוך בן מנייה של קבוצות פתוחות.

תהי $E \subseteq \mathbb{R}$ הוכיחו שקיימת קבוצה $G \in G_\delta$ המקיימת $E \subseteq G$ וכן $m^*(G) = m^*(E)$.
הדרכה: עקבו אחרי השלבים הבאים:
   א. הוכיחו שלכל קבוצה $E \subseteq \mathbb{R}$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיימת קבוצה פתוחה O , המקיימת $E \subseteq O$ וכן

$$m^*(O) < m^*(E) + \varepsilon$$

   ב. בנו סדרה של קבוצות פתוחות מתאימות ע"פ א' וחיתכו אותן.

4. תהי $\mathcal{E}$ משפחה כלשהי של קבוצות ב X . הראו כי לכל $A \in \sigma(\mathcal{E})$ קיימת משפחה בת מנייה $\mathfrak{D} \subseteq \mathcal{E}$ כך ש $A \in \sigma(\mathfrak{D})$.
הדרכה:
   א. הראו כי קבוצת הקבוצות ב $\sigma(\mathcal{E})$ המקיימות את תכונה זו הינה סיגמא אלגברה.
   ב. הראו כי הקבוצות ב $\mathcal{E}$ מקיימות את תכונה זו והסיקו את הנדרש