תרגול 7

אם עבור הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ קיים n_0 טבעי כך שלכל $n > n_0$ $a_n < 0$. אז ניתן להשתמש במבחני השוואה עבור טורים חיובים ובמשפטים שראינו תרגול קודם.
השיעור נבחן טורים עם אינסוף איברים חיובים ואינסוף איברים שלילים.

מטרת השיעור: לבחון התכנסות והתבדרות של טורים לא חיובים ולא שליליים. ז"א טורים עם אינסוף איברים חיובים ואינסוף איברים שליליים.

<u>משפט</u>

אם הטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס, אזי גם הטור הכללי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

<u>דוגמא</u>

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ מתכנס מכיוון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right|$ מתכנס.

<u>הערה</u>

הטענה ההפוכה לא נכונה. אנחנו נראה בהמשך השיעור שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ מתכנס, אבל ראינו בתרגול הקודם שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|$ מתבדר.

<u>התכנסות בהחלט</u>

<u>הגדרה</u>

נאמר שטור כללי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט, אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס.

<u>תרגיל</u>

בדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{n^2}$

<u>פתרון</u>

נבחן תחילה את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin 2n}{n^2}\right|$ קיבלנו טור חיובי ולכן ניתן להשתמש במבחן ההשוואה הראשון. לכל n טבעי מתקיים $\left|\frac{\sin 2n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$. ראינו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס ולכן על פי מבחן ההשוואה הראשון הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin 2n}{n^2}\right|$ מתכנס ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{n^2}$ מתכנס בהחלט.

<u>תרגיל</u>

בדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{5n^3 - n^2 + 1}$.

פתרון

נסמן $a_n = \frac{(-1)^n n^3}{5n^3 - n^2 + 1}$ מכיוון ש $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ נקבל שהתנאי הכרחי להתכנסות טורים לא מתקיים והטור מתבדר.

הערה

אם נרצה לבדוק את התכנסותו או התבדרותו של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{5\pi}{n}$ ניתקל בבעיה מכיוון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \sin\frac{5\pi}{n}\right|$ מתבדר. (ניתן להראות ע"י מבחן ההשוואה השני עם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$)

ו $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \sin\frac{5\pi}{n} = 0$.

מטרה: להראות דרכים לקביעת התכנסות והתבדרות טורים כלליים.

הגדרה

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ ($a_n > 0$ לכל n טבעי) נקרא טור מתחלף.

משפט לייבניץ

הטור המתחלף $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ מתכנס אם מתקיימים התנאים הבאים:

א. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

ב. $a_n > a_{n+1}$ לכל n טבעי.

דוגמא

נתבונן בטור המתחלף $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. נשים לב ששני התנאים ממשפט לייבניץ מתקיימים מכיוון ש $a_n = \frac{1}{n}$. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ובנוסף $a_n > a_{n+1}$ לכל n טבעי.

הערה

אם תנאי א לא מתקיים אז הטור מתבדר.
אם תנאי א מתקיים אבל תנאי ב לא מתקיים אז לא ניתן לדעת ממשפט לייבניץ אם הטור מתכנס או לא.

תרגיל

האם הטור $\frac{1}{65} - \frac{2}{70} + \frac{3}{75} - \frac{4}{80} + \frac{5}{85} - .....$ מתכנס או מתבדר? נמק את תשובתך.

פתרון

נשים לב שהטור מתחלף וניתן לרשום אותו באופן הבא: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{5n+60}$ ולכן $a_n=\frac{n}{60+5n}$ קיבלנו ש $\lim_{n\to\infty}=\frac{1}{5}\neq 0$ ולכן לא ניתן להשתמש במשפט לייבניץ. בכל אופן $0 \neq \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{5n+60}$ ולכן על פי התנאי ההכרחי להתכנסות טורים לא מתקיים והטור מתבדר.

<u>התכנסות בתנאי</u>

<u>הגדרה</u>

נאמר שהטור הכללי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בהחלט, אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס.

אם הטור הכללי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אבל הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתבדר נאמר שהטור מתכנס בתנאי.

<u>תרגיל</u>

נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{5\pi}{n}$ האם הטור מתכנס (בתנאי או בהחלט) או מתבדר.

<u>פתרון</u>

הטור הנבחן מתחיל להיות טור מתחלף מ $n>5$ כאשר $a_n=\sin\frac{5\pi}{n}$. נבדוק התכנסות בהחלט. על פי מבחן ההשוואה השני $\left(b_n=\frac{1}{n}\right)$. $L=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{5\pi}{n}}{1/n}=5\pi$ ולכן הטור מתבדר.

הטור הנבחן מתחיל להיות טור מתחלף מ $n>5$ כאשר $a_n=\sin\frac{5\pi}{n}$. מכיוון ש $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ והסדרה מונוטונית יורדת עבור $n>10$ נקבל ממבחן לייבניץ שהטור מתכנס ולכן הטור מתכנס בתנאי.

<u>תרגיל</u>

נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{25n+3}{n(2n+1)}$ האם הטור מתכנס (בתנאי או בהחלט) או מתבדר.

<u>פתרון</u>

נבדוק תחילה האם הטור מתכנס בהחלט ז"א נבדוק האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{25n+3}{n(2n+1)}$ מתכנס. נשתמש במבחן ההשוואה השני כאשר ניקח את הטור ההרמוני.

נשים לב ש $L=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{25n+3}{n(2n+1)}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{25n+3}{2n+1}=12.5$ מכיוון ש $0<L<\infty$ והטור ההרמוני מתבדר נקבל שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{25n+3}{n(2n+1)}\right|$ מתבדר ולכן הטור לא מתכנס בהחלט. הטור הוא טור מתחלף.

נבדוק האם התנאים של משפט לייבניץ מתקיימים.

1. $0<\lim_{n\to\infty}\frac{25n+3}{n(2n+1)}\leq\lim_{n\to\infty}\frac{25n}{n(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{25}{(2n+1)}=0$ ולכן $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

2. נבחן את הפונקציה

$$f\left(x\right)=\frac{25x+3}{x\left(2x+1\right)}=\frac{25x+3}{2x^2+x}$$

$$f'\left(x\right)=\frac{25\left(2x^2+x\right)-\left(4x+1\right)\left(25x+3\right)}{\left(2x^2+x\right)^2}=\frac{50x^2+25x-100x^2-37x-3}{\left(2x^2+x\right)^2}=\frac{-50x^2-37x-3}{\left(2x^2+x\right)^2}$$

הנגזרת שלילית לכל מספר חיובי ולכן הפונקציה יורדת לכל x חיובי, ז"א $a_n>a_{n+1}$ לכל n טבעי.

תנאי משפט לייבניץ מתקיימים והטור מתכנס בתנאי.

<u>מבחן דריכלה</u>

יהי $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ טור חסום ו $\left\{a_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית שואפת לאפס. אזי $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ מתכנס.

<u>תרגיל</u>

הוכח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n\right)}{n}$ מתכנס.

<u>פתרון</u>

הסדרה $a_n=\frac{1}{n}$ מונוטונית שואפת לאפס ולכן נשאר להראות שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(n\right)$ חסום.

נראה שסדרת הסכומים החלקיים $S_n=\sin\left(1\right)+\sin\left(2\right)+...+\sin\left(n\right)$ חסומה.

נכפול פי $2\sin\left(1\right)$ בשני האגפים ונקבל

$$2\sin\left(1\right)S_n=2\sin\left(1\right)\sin\left(1\right)+2\sin\left(1\right)\sin\left(2\right)+...+2\sin\left(1\right)\sin\left(n\right)$$

נשתמש בזהות הטריגונומטרית $2\sin\alpha\sin\beta=\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha+\beta\right)$.

ואז

$$2\sin\left(1\right)\sin\left(1\right)+2\sin\left(1\right)\sin\left(2\right)+...+2\sin\left(1\right)\sin\left(n\right)==$$

$$\left(\cos 0-\cos 2\right)+\left(\cos 1-\cos 3\right)+\left(\cos 2-\cos 4\right)+\left(\cos 3-\cos 5\right)+...+\left(\cos\left(n-1\right)-\cos\left(n+1\right)\right)=$$

$$=\cos 0+\cos 1-\cos n-\cos\left(n+1\right)$$

ז"א

$S_n=\frac{\cos 0+\cos 1-\cos n-\cos\left(n+1\right)}{2\sin 1}\Rightarrow\left|S_n\right|\le\frac{4}{2\sin 1}$ וקיבלנו את הדרוש.

<u>מבחן קושי</u>

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור כלשהו. נסמן $L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ אזי:

1. אם $L<1$ $\Leftarrow$ הטור מתכנס בהחלט.
2. אם $L>1$ $\Leftarrow$ הטור מתבדר.
3. אם $L=1$ $\Leftarrow$ לא ניתן להכריע על פי מבחן זה.

<u>תרגיל ממבחן תשע"א סמסטר ב מועד א</u>

עבור אילו ערכים של פרמטר p מתכנס הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{p^{2n}}$.

<u>פתרון</u>

נשתמש במבחן קושי $L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^n}{p^{2n}}}=\frac{e}{p^2}$.

כאשר $\frac{e}{p^2}<1$ הטור מתכנס ולכן $p<-\sqrt{e}\vee\sqrt{e}<p \leftarrow e<p^2$.

כאשר $\frac{e}{p^2}>1$ הטור מתבדר ז"א $-\sqrt{e}<p<\sqrt{e}$.

שימו לב שכאשר $p=\pm\sqrt{e}$ הטור מתבדר (ניתן לראות בקלות ע"י הצבה).

בסה"כ כאשר $p<-\sqrt{e}\vee\sqrt{e}<p$ הטור מתכנס וכאשר $-\sqrt{e}\le p\le\sqrt{e}$ הטור מתבדר.

<u>מבחן דלאמבר</u>

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור כלשהו. נסמן $L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ אזי:

1. אם $L<1$ $\Leftarrow$ הטור מתכנס בהחלט.
2. אם $L>1$ $\Leftarrow$ הטור מתבדר.
3. אם $L=1$ $\Leftarrow$ לא ניתן להכריע על פי מבחן זה.

<u>תרגיל</u>

קבע עבור אילו ערכי c הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c^n}{n}$ מתכנס.

<u>פתרון</u>

נשתמש במבחן דלאמבר. $L=\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{c^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{c^n}\right|\right)=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\cdot c}{n+1}\right|=|c|$.

ולכן כאשר $|c|<1$ הטור מתכנס. כאשר $c=1$ נקבל טור הרמוני וראינו שטור הרמוני גם מתבדר. כאשר $c=-1$ נקבל את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ וראינו כבר שהטור הנ"ל מתכנס. ולכן הטור מתכנס כאשר $-1\le c<1$.

<u>הערה</u>

מבחני דלאמבר וקושי מתאימים גם לטורים חיובים וגם לא טורים כללים.

סיכום

כאשר אנו רוצים לבחון התכנסות או התבדרות של טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ עם אינסוף איברים חיובים ושלילים (לא בהכרח מתחלף) נבצע את הפעולות הבאות:

1. נבדוק האם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אם כן נעבור לשלב הבא ואם לא סיימנו הטור מתבדר.
2. נבדוק האם הטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס. אם כן סיימנו הטור מתכנס בהחלט, אם לא נעבור לשלב הבא.
3. נבדוק האם הטור מתחלף או לחילופין האם ניתן להגיע לטור מתחלף ע"י הורדת מספר סופי של איברים. מכיוון שראינו בשלב 1 ש $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ נשאר להראות שאם $a_n = (-1)^{n+1} b_n$ אז $b_{n+1} > b_n$ לכל n טבעי או שמתקבל טור כזה לאחר הורדת מספר סופי של איברים מהסדרה בטור. אם אכן התנאי מתקיים אז לפי לייבניץ הטור מתכנס, מכיוון שמסעיף 2 הטור מתבדר נקבל שהטור מתכנס בתנאי. אם התנאי לא מתקיים נעבור לסעיף הבא.
4. נמצא את סדרת הסכומים החלקיים S_n ונחשב את הגבול $\lim_{n\to\infty} S_n$.
5. שימוש במבחן קושי ודלאמבר. המבחנים יתאימו רק לטורים שמתכנסים בהחלט לא נוכל להשתמש בהם עבור טורים שמתכנסים בתנאי.