תרגול 5

<u>טורים מספרים</u>

מטרת ההרצאה:

1. להגדיר סכום של סדרת מספרים $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
2. להראות טכניקות לחישוב הסכום של סדרת מספרים $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
3. להראות כיצד ניתן לקבוע האם סכום הסדרה מתכנס או מתבדר.

לפני שנגדיר סכום של סדרת מספרים $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ נראה דוגמה לסדרת מספרים ונחשב את סכומה.

<u>דוגמא</u>

נתבונן בסדרה הנדסית $3,\frac{3}{2},\frac{3}{4},\frac{3}{8},...$ ונחשב את סכום הסדרה.

נתבונן בסדרה חדשה שבה האיבר הראשון הוא האיבר הראשון בסדרה הנתונה, האיבר השני הוא סכום שני האיברים הראשונים בסדרה הנתונה וכן הלאה...

ז"א $3,3+\frac{3}{2},3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4},3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8},....$ הסדרה הנ"ל נקראת סדרת הסכומים החלקיים של הסדרה הנתונה.

נחשב את הגבול של סדרת הסכומים החלקים ונקבל את הסכום של סדרת המספרים.

תזכורת: סכום הסדרה של n האיברים הראשונים של סדרה הנדסית שמנתה q הוא $S_n=\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$

ואז הסדרה הנתונה היא $S_1,S_2,S_3,...S_n,...$ ז"א $3,\frac{3\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{1-\frac{1}{2}},\frac{3\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)}{1-\frac{1}{2}},...\frac{3\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}},...$.

ולכן נשאר לחשב את הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3\cdot 1}{1-\frac{1}{2}}=6$ נשים לב ש $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$.

<u>הגדרה</u>

הביטוי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+...+a_n+...$ נקרא טור אינסופי. האיבר a_n נקרא האיבר הכללי של הטור.

<u>דוגמא</u>

נתבונן בטור מהדוגמא הקודמת. האיבר הכללי הוא $a_n=\frac{3}{2^{n-1}}$ ולכן הטור האינסופי הוא $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^{n-1}}$.

ראינו ש $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^{n-1}}=6$.

הגדרה

סכום n המחוברים הראשונים של טור נקרא סכום חלקי של הטור ומבוטא ע"י $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

דוגמא

נתבונן בטור מהדוגמה הקודמת $S_n = 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + ... \frac{3}{2^{n-1}}$ שימו לב שניתן לסמן את הסכום ע"י $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{2^{k-1}}$.

הגדרה

הגבול (אם הוא קיים) של סדרת הסכומים החלקיים $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ נקרא הסכום של הטור האינסופי.

אם גבול זה קיים והוא סופי, אזי נאמר שהטור מתכנס. במקרה אחר הטור מתבדר.

דוגמא 1

נתבונן בטור מהדוגמא הקודמת $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + ... \frac{3}{2^{n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}$.

דוגמא חשובה

הטור הגיאומטרי $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$.

ראינו ש $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a\left(1-q^n\right)}{1-q}$.

אם $|q| < 1$ אז $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ ולכן הטור מתכנס וסכומו $\frac{a}{1-q}$.

אם $|q| \ge 1$ אז הגבול $\lim_{n\to\infty} S_n$ לא קיים והטור מתבדר.

דוגמא 2

נתבונן בסדרת המספרים הקבועה $1,1,1,1,1....,1,...$ אם נחבר את n האיברים הראשונים נקבל $S_n = n$ ואז $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$ ולכן הטור מתבדר.

משפט

תהיינה נתונות שתי סדרות $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ אם הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנסים וסכומיהם A, B בהתאמה, אז $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \pm b_n\right)$ הוא טור מתכנס וסכומו $A \pm B$.

הערה

הטענה ההפוכה לא בהכרח נכונה. דוגמא: טור האפסים $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)$ מתכנס אבל הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר.

תרגיל

מצא את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-3)^n}{6^n}$.

פתרון

נסמן $a_n=\frac{2^n}{6^n}$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס וסכומו $A=\frac{1}{2}$.

נסמן $b_n=\frac{(-3)^n}{6^n}$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס וסכומו $B=-\frac{1}{3}$ לכן מהמשפט הקודם סכום הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-3)^n}{6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=A+B=\frac{1}{6}$$

הצגת איבר כללי של טור כהפרש של שני ביטויים

הרעיון של שיטה זו הוא להציג איבר כללי a_n של טור בצורה $a_n=b_{n+1}-b_n$ עבור כל n, כך שהגבול B של הסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ קיים. אזי הסכום החלקי הוא:

$$S_n=a_1+a_2+...+a_n=(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+(b_4-b_3)+...+(b_{n+1}-b_n)=b_{n+1}-b_1$$

וסכום הטור $S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_1)=B-b_1$.

תרגיל

חשב את סכום הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$.

פתרון

נשים לב ש $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{4\cdot 2^2-1}+\frac{1}{4\cdot 3^2-1}+\frac{1}{4\cdot 4^2-1}+...+\frac{1}{4n^2-1}+...$.

בנוסף $\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$.

נמצא את האיבר הכללי של סדרת הסכומים החלקיים

$$S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 2-1}-\frac{1}{2\cdot 2+1}+\frac{1}{2\cdot 3-1}-\frac{1}{2\cdot 3+1}+\frac{1}{2\cdot 4-1}-\frac{1}{2\cdot 4+1}+...\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 2-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

נחשב את גבול הסדרה.

מכיוון ש $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$ נקבל ש $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{6}$.

תרגיל

מצא את סכום הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n^2+1}{(n^2-1)^3}$.

פתרון

נשים לב ש $a_n=\frac{3n^2+1}{(n^2-1)^3}=\frac{3n^2+1}{(n-1)^3(n+1)^3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-1)^3}-\frac{1}{(n+1)^3}\right)$

לכן $S_n=a_1+a_2+...+a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{n^3}-\frac{1}{(n+1)^3}\right)$ ואז $S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{9}{16}$.

<u>הוכחה שטור מתבדר בעזרת הצגת איבר כללי של טור כהפרש של שני ביטויים</u>

בניגוד לחלק הקודם שבו חישבנו את סכום הטור האינסופי בחלק זה נלמד טכניקות לקביעת התכנסות הטור.
במסגרת הקורס אנחנו נלמד כיצד לקבוע התכנסות של טור בעזרת מבחני התכנסות.
נזכיר שהטור מתכנס כאשר הגבול $\lim_{n\to\infty} S_n$ קיים וסופי והטור מתבדר כאשר הגבול $\lim_{n\to\infty} S_n$ לא קיים או שהוא לא סופי.

<u>תרגיל</u>

קבע האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ מתבדר או מתכנס.

<u>פתרון</u>

נחשב את האיבר הכללי בסדרת הסכומים החלקיים ז"א נחשב את S_n.

$$S_n = \ln\left(1+\frac{1}{1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{4}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=\ln\left(\frac{1+1}{1}\right)+\ln\left(\frac{2+1}{2}\right)+\ln\left(\frac{3+1}{3}\right)+\ln\left(\frac{4+1}{4}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=$$

$$=\left(\ln 2-\ln 1\right)+\left(\ln 3-\ln 2\right)+\left(\ln 4-\ln 3\right)+\left(\ln 5-\ln 4\right)+\ldots+\left(\ln\left(n+1\right)-\ln n\right)=$$

$$=\ln\left(n+1\right)$$

ולכן $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(n+1\right)\right)=\infty$ ז"א הטור האינסופי מתבדר.